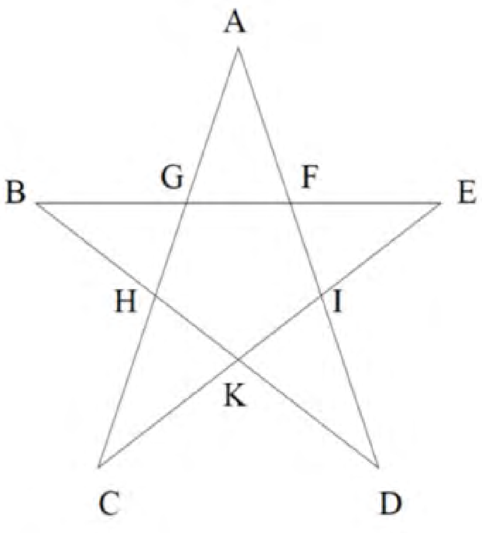
Enrico Gamba

RAFFAELLO E LE MATEMATICHE

Tracce, intuizioni, premonizioni



Quaderni del Centro
Urbino e la Prospettiva

Quaderni del Centro
Urbino e la Prospettiva

n. 04

Enrico Gamba

RAFFAELLO E LE MATEMATICHE

Tracce, intuizioni, premonizioni

1506
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI URBINO
CARLO BO

UUP
URBINO
UNIVERSITY
PRESS

Enrico Gamba
RAFFAELLO E LE MATEMATICHE
Tracce, intuizioni, premonizioni

Direttore della collana: Laerte Sorini
Comitato scientifico: Antonio Becchi, Gian Italo Bischi, Vincenzo Fano, Enrico Gamba, Pierluigi Graziani, Laerte Sorini, Gino Tarozzi, Gianni Volpe
Redazione: Pierluigi Graziani, Davide Pietrini

Progetto grafico: Mattia Gabellini
Referente UUP: Giovanna Bruscolini

In copertina:
In alto: Raffaello Sanzio, Scuola di Atene, particolare della lavagnetta euclidea (Public Domain). In basso: Stella pitagorica realizzata da Flavio Bernacchia.

PRINT ISBN 9788831205818
PDF ISBN 9788831205795
EPUB ISBN 9788831205801

Via Aurelio Saffi, 2 | 61029 Urbino
https://uup.uniurb.it/ | e-mail: uup@uniurb.it

L'edizione cartacea del volume può essere ordinata in tutte le librerie fisiche e online ed è distribuita da StreetLib (https://www.streetlib.com/it/)

Sommario

Introduzione

La *Scuola di Atene* è uno dei quattro affreschi dipinti da Raffaello nella Stanza della Segnatura in Vaticano. Il ciclo degli affreschi include la *Disputa del Sacramento*, il *Parnaso*, la *Virtù e la Legge* componendo una magistrale celebrazione delle categorie neoplatoniche del vero, del bene e del bello. Il vero razionale e naturale è rappresentato dalla *Scuola di Atene*, mentre nella *Disputa del Sacramento* è rappresentato il vero teologico, cioè il vero supremo, Dio. Il bello è figurato con il *Parnaso*, la *Virtù e la Legge* rappresenta il bene sia come legge canonica, sia come legge civile.

Per quanto riguarda l'ispirazione platonica della *Scuola di Atene*, Giovanni Reale rileva: «Viene rappresentata la storia del pensiero antico dalle sue origini alla fine, riletta nell'ottica platonica, ossia come salita verso la filosofia tramite le scienze matematiche, fino a raggiungere i vertici della metafisica»[1]. Si tratta quindi di una ascesa filosofica che culmina nelle figure di Platone e di Aristotele dipinte in atteggiamenti diversi eppure complementari.

Platone, con l'indice della mano destra rivolto verso l'alto, è visto come il filosofo della trascendenza, mentre la copia del *Timeo* tenuta nella mano sinistra mostra l'adesione alla cosmologia pitagorica, magistralmente presentata nel *Timeo*, il *Dialogo* di Platone particolarmente apprezzato nel Rinascimento. La dimensione verticale della filosofia platonica è resa ancora più evidente da uno spazio architettonico splendido per volumi, proporzioni e slancio.

A fianco di un Platone calvo e canuto nelle sembianze di Leonardo da Vinci, un Aristotele, più giovane, in atteggiamento interlocutorio, con la mano destra tesa a mezz'aria come per indicare il passaggio dalla dimensione soprasensibile al piano dei fenomeni sensibili. Con la mano sinistra Aristotele tiene una copia dell'*Etica*, una scelta che può sembrare strana, ci si aspettava che Aristotele, a fronte del testo di cosmologia mostrato da Platone, portasse con sé un volume del *De caelo* o della *Fisica*. Va tuttavia osservato che l'*Etica* era l'opera aristotelica più apprezzata dagli umanisti, oltre al sempre presente ideale umanistico di una concordanza tra la filosofia platonica e la filosofia aristotelica.

Il primo incontro di Raffaello con i ritratti dei due sommi filosofi risale agli anni della fanciullezza. Possiamo immaginare il piccolo Raffaello, già in 'odore' di genio, al fianco del padre Giovanni Santi (1433-1494), ottimo pittore, letterato di qualche pregio, autore di una *Cronaca* in rima della vita di Federico da

1 Reale (2005, XIX).

Montefeltro, personaggio molto stimato presso la corte urbinate, che percorre le stanze del Palazzo ducale, che entra in un ambiente molto suggestivo come lo studiolo del duca Federico da Montefeltro, che osserva le tarsie e al di sopra delle tarsie i ritratti degli uomini illustri opera dello spagnolo Pedro Berruguete e del fiammingo Giusto di Gand che li avevano realizzati negli anni 1470-1475. In tutto 28 dipinti, uno accanto all'altro in modo da ricoprire la parete soprastante le tarsie, che componevano un programma pittorico-culturale di vaste conoscenze, attraversate da un ideale di sapienza che metteva insieme santi e teologi come sant'Agostino, san Girolamo, san Tommaso d'Aquino, poeti come Dante e Petrarca, filosofi come appunto Platone e Aristotele, matematici come Euclide e Tolomeo, per concludersi con lo stimatissimo maestro di Federico, Vittorino da Feltre, che teneva in grande considerazione gli studi matematici[2].

La novità dell'opera stava anche nel fatto che non venivano rappresentate le figure allegoriche della filosofia, teologia, poesia, astronomia, geometria, ecc. bensì i filosofi, i teologi, i poeti, i 'mathematici', ciascuno accompagnato da una dedica che spiegava il motivo della presenza.

Il Platone della *Scuola di Atene* è in tutto simile al Platone dello studiolo dei duchi di Urbino, non tanto dal punto di vista figurativo, quanto per il riconoscimento della sua eccellenza filosofica. La dedica a Platone era così formulata: «Platoni Atheniensi, humanae divinaeque philosophiae antistini celeberrimo, Fed[ericus] dicavit ex observantia». Che 'suona' come: A Platone Ateniese, celeberrima e somma autorità in filosofia umana e divina, Federico dedicò [questo ritratto] con rispetto.

La dedica ad Aristotele è piuttosto formale: «Aristoteli Stagiritae ob philosophiam rite exacteque traditam, Fed[ericus] posuit ex gratitudine». Ovvero: Ad Aristotele Stagirita per la filosofia tramandata con razionalità ed esattezza, Federico pose [questo ritratto] con gratitudine. Evidentemente nella corte quattrocentesca dei Montefeltro Aristotele era apprezzato per la perfetta tecnica filosofica, mentre Platone era riconosciuto come il primo tra i filosofi. Sarebbe, però, eccessivo dire che le dediche vogliono segnare la differenza tra Platone massimo filosofo non sistematico e Aristotele primo tra i filosofi sistematici, o addirittura fondatore della filosofia sistematica.

Tornando alla *Scuola di Atene*, la grandezza, si può dire paritaria, dei due filosofi è espressa e celebrata da Raffaello anche con la scelta di costruire la scena in vista frontale, con il punto di fuga situato circa all'altezza delle loro teste. Inoltre si nota che la linea verticale passante per il punto di fuga viene a costituire una sorta di asse di simmetria ai lati del quale si dispongono i due nutriti gruppi di

2 Cfr. Montevecchi (1992, 343-354); Marias e Pereda (2004, 249-267).

filosofi, lasciando vuota la parte centrale dell'affresco, mentre la linea orizzontale passante per il punto di fuga, il cosiddetto «orizzonte», segna la distinzione tra un sopra per così dire architettonico, e un sotto filosofico popolato da ben 58 personaggi distribuiti su una gradinata[3].

La composizione prospettica della scena è coerente con l'idea di manifestare, in ordine ascendente e convergente, l'itinerario percorso dalla filosofia, che inizia dal livello più basso, il pavimento in primo piano, su cui stanno le 'mathematiche' ovvero le tradizionali arti del quadrivio – aritmetica, geometria, astrologia, musica – che insieme a quelle del trivio – grammatica, retorica, dialettica, qui assenti –, erano le discipline propedeutiche ai successivi studi universitari.

Le arti del quadrivio figurano nell'affresco divise in due gruppi posti uno all'estrema destra, l'altro all'estrema sinistra[4]. La divisione riprende una distinzione secondo cui l'aritmetica insieme alla musica è "scientia" della quantità discreta, mentre la geometria insieme all'astrologia è "scientia" della quantità continua. L'affresco mette due personaggi a presiedere i due settori: Pitagora quello della quantità discreta, Euclide quello della quantità continua. Più in dettaglio nella parte sinistra dell'affresco Raffaello colloca i grandi filosofi presocratici ispirati dalle dottrine orfiche tra cui appunto Pitagora intento a scrivere, alle spalle il pitagorico Filolao annota i detti del maestro, poi un discepolo che sorregge una lavagnetta; completa il gruppo un personaggio dalle fattezze arabe, indicativo dei legami tra filosofia greca e filosofia araba nella persona del filosofo Averroè, ma anche possibile rimando all'origine arabo-indiana del sistema numerico posizionale e decimale adottato in Occidente a partire dal Duecento, senza escludere un riferimento ai viaggi in Oriente del sommo filosofo di Samo. La musica è presente nella parte alta della lavagnetta con lo schema degli intervalli musicali consonanti.

Sul lato opposto dell'affresco, sempre a livello del pavimento, il gruppo dei geometri riuniti intorno ad Euclide sorpreso nel momento culminante di una lezione, mentre compasso alla mano sta spiegando il significato della figura disegnata sulla lavagnetta. L'ultima arte del quadrivio l'astrologia, relegata vicino al bordo dell'affresco, è affidata a Zoroastro, il leggendario fondatore, che sorregge un globo celeste. A fronte di Zoroastro sta Claudio Tolomeo, l'astronomo-astrologo e geografo più famoso, con un globo terrestre.

Come si vede la presenza di questi personaggi e degli oggetti ad essi associati è senza dubbio conforme alla fama di cui godevano al tempo di Raffaello. La loro collocazione risponde all'idea che le arti del quadrivio siano propedeutiche a più alti studi, largamente noto e citato era l'aneddoto di Platone che vietava

3 Figure geometriche a cura di Flavio Bernacchia.

4 Cfr. Reale e Sgarbi (2010, 193-222).

l'ingresso nel Ginnasio a coloro che ignoravano la geometria. Frate Luca Pacioli (1445-1517) un personaggio la cui linea di vita s'interseca più volte con quella di Raffaello, nel *De divina proportione* scritto nel 1498 poi stampato nel 1509 si era detto convinto «commo le discipline mathematici sono fondamento e scala de pervenire alla notitia de ogni altra scientia»[5]. Troveremo altri punti di concordanza tra Raffaello e il Pacioli.

Molte di queste identificazioni sono controverse, limitandoci ai personaggi 'mathematici' è inequivocabile l'identità di Pitagora grazie agli schemi chiaramente leggibili sulla tavoletta, ed anche quella di Tolomeo sia per il globo terrestre che sorregge con la mano, sia per la corona regale che, secondo una consolidata tradizione iconografica, faceva del grande astronomo-astrologo e geografo un membro della dinastia dei Tolomei che regnava sull'Egitto. L'identità del personaggio che sta di fronte a Tolomeo con in mano un globo celeste non è accertabile, osserva Glenn W. Most: «Né il suo copricapo, né l'abito, forniscono indicazioni sufficientemente precise per giustificare l'identificazione con Zoroastro». Christiane Joost-Gaugier avanza l'iptesi che sia Strabone (c. 60 a.C – c. 42 d.C.), l'altro celebre geografo dell'Antichità. L'identificazione ha le sue ragioni, ma non tali da soppiantare le altre, in via convenzionale si continuerà a indicarlo come Zoroastro[6].

Sorgono dubbi anche sulla identità del personaggio con in mano un compasso, chino su una lavagnetta. Ancora Most mette in guardia dal rischio di una identificazione affrettata: osserva giustamente che finché non verrà fatta chiarezza sulla enigmatica figura geometrica tracciata sulla lavagnetta, ogni attribuzione potrà sollevare delle riserve. Tuttavia arriva a una conclusione eccessiva quando afferma che «il personaggio in questione va interpretato semplicemente come un anonimo rappresentante della sua categoria»[7]. Invece sembra proprio che Raffaello voglia dare al personaggio una evidente statura magistrale, contornandolo con quattro discepoli che pendono dalle sue labbra, insomma un personaggio storicamente esistito. A questo punto l'alternativa è tra Euclide e Archimede, a favore del primo, come si spiegherà nel seguito.

Un resoconto dell'affresco così parziale e schematico è sufficiente per comprendere la novità, la complessità, il valore, dell'opera; possiamo solo immaginare la serie di incontri, di colloqui, di discussioni, di letture, che hanno portato alla ideazione dell'intera Sala e dei singoli affreschi. Ben poco sappiamo dei personaggi che, poco o tanto, hanno avuto parte in merito, è altresì evidente che

5 Pacioli (1509, lettera di dedica a Ludovico il Moro).

6 Most (2001, 17). Most ripercorre la storia delle identificazioni (pp. 6-9) e fa il punto sullo stato attuale (pp. 15-19). Stessa operazione in Joost-Gaugier (2002, 107 e ss).

7 Ivi, 16.

un'opera di tale portata ha richiesto a Raffaello un notevole sforzo conoscitivo. La rapida esecuzione della *Scuola di Atene*, durata dal 1509 al 1511 suggerisce che le idee su cosa e come fare erano piuttosto precise fin dall'inizio.

Dato l'obiettivo di questa ricerca, l'attenzione è rivolta ai personaggi e agli oggetti legati in qualche modo alla matematica, specialmente alle due lavagnette, quella pitagorica e quella diciamo euclidea. Oggetti di uso corrente al tempo di Raffaello, per fare i conti, per brevi notazioni, per tracciare qualche schizzo, le lavagnette assumono nell'affresco un notevole rilievo, perché sono in primo piano e perché quanto è disegnato sopra è chiaramente visibile. Raffaello vuole che si sappia cosa i matematici stanno cogitando e discutendo, vuole che chi guarda l'affresco possa in certo modo partecipare alle discussioni tra i matematici greci. È una originale scelta figurativa riservata solo ai due gruppi dei matematici: Raffaello va oltre la semplice presenza delle rispettive autorità contrassegnata dalle tradizionali simbologie – il compasso per la matematica, l'astrolabio o la sfera armillare per l'astronomia-astrologia –, non si limita alla citazione dei titoli delle opere, come per Platone e Aristotele, apre un discorso leggibile sulla matematica, compito questo assegnato alle lavagnette.

È il caso di puntualizzare che dicendo Raffaello s'intende a volte la persona, a volte quell'ambito di sconosciute persone che ha concepito il ciclo degli affreschi nella *Stanza della Segnatura*, nel suo complesso e nei numerosi dettagli. Il contesto indica come intendere.

Se sono chiari gli obiettivi, rimane la difficoltà di comprendere i disegni nelle lavagnette che esprimono contenuti, interpretazioni e suggestioni di vario tipo. Occorre capire quindi i punti di vista di Raffaello, le scelte che poteva fare, i motivi delle scelte consapevolmente fatte. A tale scopo risulta innanzitutto utile procedere all'esame di alcune condizioni di fatto, che sono le seguenti. Quali fonti d'informazione in materia Raffaello aveva a disposizione? Quali informazioni poteva ottenere dalle persone che frequentava o con cui aveva avuto incontri significativi? Delle conoscenze matematiche e delle dottrine matematico-filosofiche cosa circolava negli ambienti frequentati da Raffaello? Da questo insieme di relazioni proviene la scelta delle figure disegnate sulle 'cosmiche' lavagnette.

Non è possibile dare risposte complete a tutte queste domande; ciò non toglie che vada tenuta viva la correlazione tra interrogativi e risposte per raggiungere un migliore grado di conoscenza, anche limitatamente ad alcuni argomenti di indubbio rilievo. Non è proprio il caso di pervenire, tramite forzature artificiose, a delle spiegazioni conclusive; in ultima analisi è positivo che una sublime opera d'arte come la *Scuola di Atene* continui a suscitare domande, eludendo determinazioni 'a tutti i costi'.

1. Le armonie della lavagnetta pitagorica

I disegni tracciati sulla lavagnetta pitagorica sono una felice sintesi della filosofia di una delle personalità più influenti e affascinanti nella storia del pensiero sia greco, sia occidentale. Grazie alla fama del filosofo di Samo, Raffaello e chi lo affiancava nella veste di consulente 'scientifico', non hanno incontrato grandi difficoltà per trovare cosa mettere nella lavagnetta; quelle che vediamo erano tutto sommato simbologie abbastanza note e codificate: la forma geometrica dei numeri – nella parte bassa della tavoletta –, e i rapporti numerici tra i suoni, sono e rimangono gli emblemi 'ufficiali' della filosofia pitagorica. Forse per questo la lavagnetta non è presentata da Pitagora, tutto immerso nella scrittura di un libro – si ignora quale, dato che al filosofo non è attribuita nessuna opera –, ma da un allievo che potrebbe essere considerato l'esecutore dei disegni nella lavagnetta [Fig. 1]. Circa la fonte d'informazioni sulla scuola pitagorica difficilmente Raffaello avrebbe consultato testi di filosofia, data la scarsa conoscenza del latino, e dato che la filosofia non faceva parte delle conoscenze utili per i tecnici; quindi la ricerca delle fonti da cui ha tratto i disegni va diretta verso testimoni non filosofici.

Fig. 1. Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene*, particolare del gruppo dei pitagorici (Public Domain).

Una fonte certa Raffaello l'aveva a disposizione, era la persona di Fabio Calvo, l'umanista ravennate che a casa del pittore stava traducendo in volgare il *De architectura* di Vitruvio rendendo comprensibile il testo a chi non conosceva la lingua di Cicerone. Nel libro III Vitruvio squaderna un mondo intessuto di rapporti armonici. Rapporti tra le membra del corpo umano, ad esempio quello ideale di 6 : 1 tra altezza dell'uomo e lunghezza del piede; lo stesso piede che diventa unità di misura degli elementi architettonici, come lo diventano altre unità di misura 'tarate' sul corpo umano, il cubito in rapporto di 1 : 4 con l'altezza dell'uomo, il palmo in rapporto di 1 : 6 col cubito, il "digito" rapporto di 1 : 24 col cubito. Si celebrano intrecci numerici che comprendono uomo e architetture, che regolano lo spazio dentro cui gli uomini vivono, che danno un ordine modulare alle dimensioni degli edifici, soprattutto ai templi, messi in armonia con l'ordine cosmico. Nelle proporzioni numeriche il microcosmo terrestre diventa consonante col macrocosmo celeste. Si arriva così a quelle dottrine filosofiche che vedono nei numeri i principi costitutivi delle cose. Certo, Vitruvio era un romano, e come tale poco incline alla speculazione filosofica, ma la figura 'alta' di architetto che vuole affermare nel *De architectura* richiede la conoscenza della filosofia implicata nelle opere che costruisce. Così nelle prime pagine del libro III del *De architectura* troviamo un condensato di matematica platonico-pitagorica che Raffaello ha sicuramente letto con grande attenzione[8]. Riassume Vitruvio.

> [i Greci] «Recolsero anchora dalle membra del corpo del homo le ragioni delle misure le quali par che siano et vedanse neccesarie in tutte l'opere, come el dito, el palmo, el piede et el cubito, et quelle distribuirno in numer perffecto il quale dalli greci è ditto toleon, ma li antiqui chiamarno numero perffecto el diece perché delle mani e delli piedi sono dieci li diti, et dalli diti trovarno el palmo et dal palma el piede. Et come nell'una et nell'altra palma son facta dalla natura diece dita, così piacque a Platone per questa causa el diece esser numero perfecto perché di cose singulare che da' greci son chiamate monades cioè unitate».[9]

Il numero 10 era considerato perfetto in quanto somma delle prime quattro cifre 1 + 2 + 3 + 4. Anche il 6 era considerato perfetto in quanto somma dell'unità – monade, numero né pari né dispari, da cui procedono tutti i numeri – con il primo numero pari 2 e il primo numero dispari 3.

L'unico personaggio che Vitruvio nomina è appunto Platone, aggiunge non meglio identificati «matematici» quasi certamente pitagorici, tuttavia il nome di Pitagora non compare, o meglio il Pitagora che compare è un Pitagora 'cosmologo' collocato dopo Talete ed Eraclito: «Phitagora et la sua disciplina ag-

8 Biblioteca Statale Bavarese. cod. it. 37. C 65v. Cfr. Ciocci (2016, 121-164).

9 Biblioteca Statale Bavarese. cod. it. 37. C 65v

gionse et accompagnò all'acqua et al foco, l'aere et la terra»[10]. Vitruvio parla del dieci come numero perfetto composto da «monades cioè unitate», resta implicita la forma geometrica dei numeri, notizia che arriva a Raffaello da altre fonti. Una delle più probabili è la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, Venezia 1494, ponderosa enciclopedia matematica del citato frate francescano Luca Pacioli (1445-1517) da Borgo Sansepolcro[11]. La *Summa* inizia trattando le caratteristiche e le proprietà dei numeri naturali, per due volte è riportato a margine lo schema dei numeri triangolari[12][Fig. 2].

Fig. 2 Costruzione di un numero triangolare in Pacioli (1494).

Possiamo immaginare l'interesse che simili argomenti suscitavano. Va sottolineato il collegamento con la corte urbinate, la presenza seppure saltuaria a Urbino di un personaggio come Pacioli che faceva di tutto per attirare l'atten-

10 Biblioteca Statale Bavarese. cod. it. 37. C 35v.

11 Ciocci (2009). Ulivi (2009, 33).

12 Pacioli (1494, 2v e 11r).

zione, non è da escludere che il giovanissimo Raffaello sia venuto a conoscenza dei numeri figurati e di altre cose matematiche, ascoltando uno dei discorsi che il frate pronunciava presso una corte ben disposta ad ascoltarlo con stima e piacere. Nei suoi discorsi numerico-filosofici Pacioli fa spesso riferimento alla *Arithmetica* del filosofo Severino Boezio (475c.-525 d.C.), un autore molto conosciuto e considerato durante il Medioevo e il Rinascimento, anche lui tra i sapienti dello studiolo ducale. Dice la dedica del ritratto di Urbino: «L. Boetio ob cuius commentationes latini M[arci] Varronis scholas non desiderant, Fed[ericus] Urb[ini] princeps pos[uit]». A L. Boezio, Federico principe di Urbino pose, perché grazie alle sue opere i latini non sentono la mancanza delle fatiche di Marco Varrone.

Marco Terenzio Varrone (116-27 a.C.) uno dei più grandi eruditi e poligrafi romani, autore di almeno 74 opere, che coprono quasi l'intero scibile del suo tempo: dal teatro all'agricoltura, alla storia, politica, matematica, astronomia. Di questo imponente corpus quasi nulla è rimasto, conosciamo solo il trattato *Rerum rusticarum libri tres*, più una miriade di citazioni da parte degli scrittori latini.

Con la dedica Federico rende indirettamente omaggio anche alle opere matematiche di Boezio che oltre alla *Arithmetica* comprendono una *Geometria*. Non si tratta di opere originali, la *Geometria* è un riassunto dei primi quattro libri degli *Elementi* di Euclide, la *Arithmetica* è la riproposizione della *Introduzione all'aritmetica* del matematico pitagorico Nicomaco di Gerasa (120c.- 60c. a.C.). Furono comunque opere molto lette durante il Medioevo e il Rinascimento, poi largamente diffuse tramite la stampa; la prima edizione della *Arithmetica* è a Venezia nel 1488, seguono altre edizioni veneziane nel 1491 e 1499, e un'edizione parigina nel 1496, per non citare le edizioni cinquecentesche.

Nella *Arithmetica* troviamo i numeri triangolari, quadrati, pentagonali, esagonali con i relativi schemi geometrici che li rappresentano come insiemi di unità dotate di reale esistenza[13]. I numeri acquistavano dimensioni, erano anche enti geometrici, come dicono gli storici quella dei pitagorici è un'aritmetica che si fonde con la geometria, è una "aritmogeometria".

13 Boezio (1491, 164v-165v).

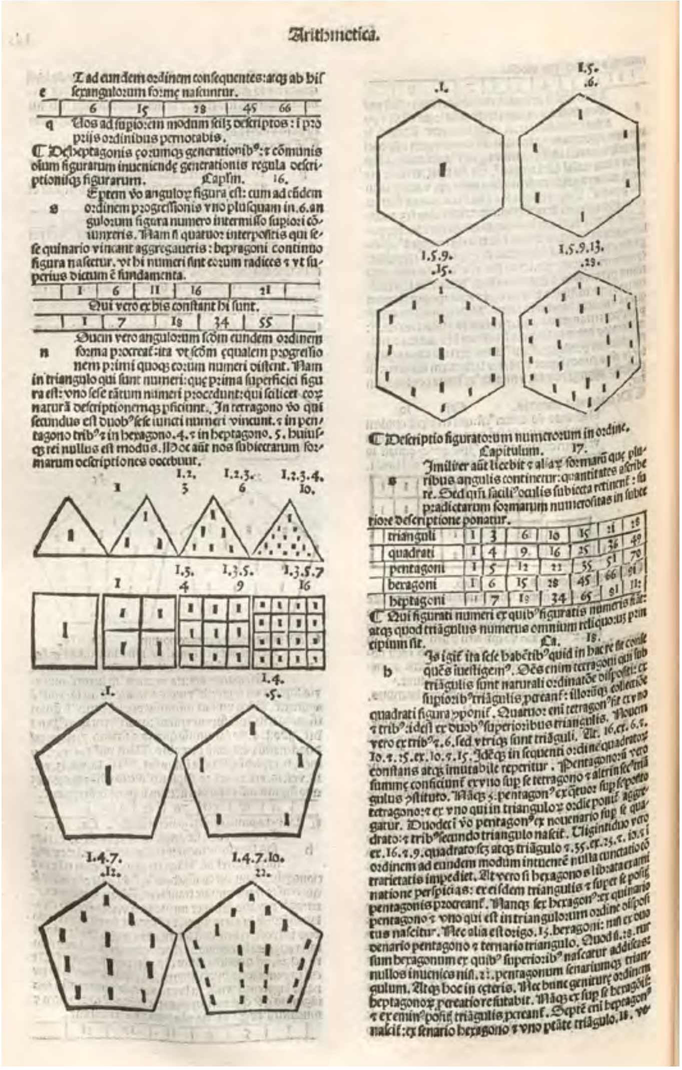


Fig. 3. Boezio (1491, 165v).

La successione dei numeri figurati triangolari si ottiene aggiungendo una riga con una unità-monade in più rispetto alla riga precedente. I numeri pentagonali si ottengono per orlatura. Si inizia con l'unità-monade 1, poi a 1 si sommano 4 unità-monadi pertanto 1 + 4 = 5. Poi infittendo si aggiungono 7 unità-monadi: il terzo numero-monade è (1 + 4) + 7 = 12. Inframmezzando ancora (1 + 4 + 7) + 10 = 22 [Fig. 3].

Sulla effettiva esistenza degli enti matematici – numeri o figure geometriche che siano – Platone concorda con i pitagorici. Nella filosofia platonica la matematica fa parte della realtà intellegibile considerata un livello superiore rispetto alla realtà sensibile, caratterizzata quest'ultima dalla imperfezione e dalla instabilità, mentre nel mondo dell'intellegibile regna l'assoluto e l'immutabile.

Fig. 4a Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene*, particolare della Scuola pitagorica (Public Domain).

Quindi anche un platonico avrebbe condiviso senza difficoltà l'idea pitagorica che la forma geometrica del numero 10 è il triangolo equilatero di lato 4, grazie al quale riusciamo a vedere le 10 unità (monadi) così ordinate [Fig. 4a e 4b].

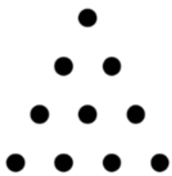


Fig. 4b

Oltre a questo il 10 godeva di numerose proprietà. Nella decade sono compresi quattro numeri pari (2, 4, 6, 8), e quattro numeri dispari (3, 5, 7, 9). Il numero 1 non era considerato né pari né dispari perché dall'1 sono generati sia i pari, sia i dispari. Nella decade sono compresi quattro numeri primi (2, 3, 5, 7) e quattro numeri non primi (4, 6, 8, 9). La prima metà della decade contiene tre numeri (2, 3, 5) che sono sottomultipli di tre numeri compresi nella seconda metà della decade (6, 8, 10). E così via [Fig. 4]. Sono alcuni esempi, giusto per comprendere lo spirito della tradizione pitagorica, non è il caso di fare l'elenco di tutte le acrobazie numeriche che seppero escogitare. La raffigurazione geometrica del numero 10, con sotto il numero stesso in cifra romana, come si vede nell'affresco, era quanto di meglio Raffaello potesse scegliere per sintetizzare un punto centrale, e anche il messaggio della filosofia pitagorica.

Fig. 5 Gaffurio F., *Practica musicae*, Milano, 1496.

Sempre in Vitruvio e in Boezio si trovano le fonti dell'altra figura nella lavagnetta pitagorica, il diagramma dei rapporti numerici tra le note musicali consonanti[14]. Boezio tramanda come Pitagora «ritrovò la ragione delle musicali proportioni al suono dei martelli». Ebbe l'intuizione quando «passando appresso una bottega di fabbri, i quali con diversi martelli battevano un ferro acceso sopra l'incudine, gli pervenne all'orecchie un certo ordine de' suoni, che gli movea l'udito con dilettatione» [Fig. 5].

La prima ipotesi è che «cotale effetto da le forze diseguali degli uomini potesse procedere». Da accorto 'protofisico' Pitagora mette alla prova l'ipotesi delle «forze diseguali degli uomini».

«Fece che coloro i quali battevano cambiassero i martelli, ma non udendo suono diverso da quello di prima, giudicò (come era il vero) che la diversità del peso de' martelli fusse cagione».

L'ipotesi delle «forze diseguali degli uomini» si mostra errata, Pitagora formula un'altra ipotesi, «la diversità del peso de' martelli» come causa di quel «certo ordine de' suoni, che gli movea l'udito con dilettatione» e la mette alla prova.

«Per la qual cosa havendo fatto pesare ciascuno separatamente, ritrovò tra li numeri delli pesi [dei martelli] le ragioni de le consonanze et de l'harmonie».

L'ipotesi si rivela corretta, Pitagora ha avuto il colpo di genio di mettere in relazione i valori numerici dei pesi dei martelli, espressi dai numeri 6, 8, 9, 12, con i suoni consonanti ed armonici. È la prima formulazione in termini matematici di un fenomeno fisico terrestre.

Per quanto concerne la musica la intuizione di Pitagora ha immediata conseguenza per il problema fondamentale della accordatura degli strumenti musicali.

«Le quali [consonanze] egli poi industriosamente accrebbe in questo modo: che havendo fatto corde di budella di pecore, di grossezza uguale, attaccando ad esse li medesimi pesi de' martelli ritrovò le medesime consonanze»[15].

Le corde tese dai pesi dei martelli – poniamo di libbre 6, 8, 9, 12 –, messe in vibrazione danno gli stessi suoni dei martelli, si identificano così le note e gli intervalli consonanti tra una nota e l'altra. Un intervallo tra due note è considerato consonante se le due note suonate in contemporanea danno un effetto gradevole. Con le stesse note sono accordate le quattro corde della cetra o lira.

Per visualizzare la teoria pitagorica della musica Raffaello ricorre a un diagramma noto da secoli attraverso l'opera di Severino Boezio, che compare nell'ultima pagina del *De arithmetica*, oltre che nel *De musica* [Fig. 6].

14 Joost-Gaugier (2008).

15 Zarlino (1573, 6 e 70). Boezio (1491, 175v).

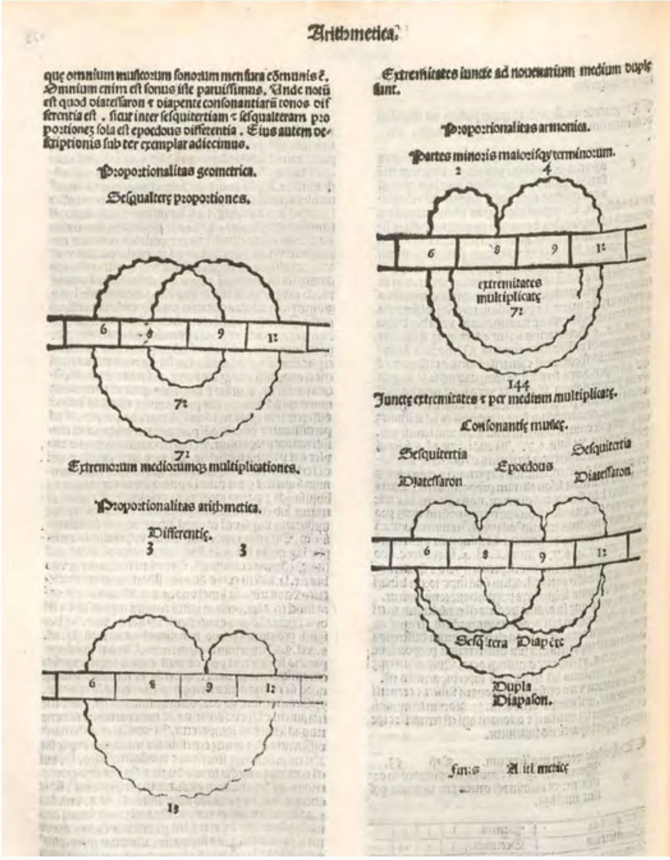


Fig. 6. Boezio (1491, 173v).

Proporzione geometrica. Rapporto 'sesquialtero' tra i termini: 9/6 = 12/8 = 3/2; il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi: 6 × 12 = 8 × 9 = 72. Proporzione aritmetica. Uguaglianza delle differenze: 9 – 6 = 12 – 9 = 3; somma degli estremi: 6 + 12 = 18. Proporzione armonica. Differenza doppia tra i termini maggiori e minori: 12 – 8 = 4   8 – 6 = 2. Prodotto degli estremi 6 × 12 = 72; qualora raddoppiato 72 × 2 = 144. Consonanze musicali. Rapporto doppio = 2/1 → diapason. Rapporto 'sesquialtero' = 3/2 → diapente. Rapporto 'sesquiterzo' = 4/3 → diatessaron. Rapporto 'sesquiottavo' = 9/8 → epogdoon.

L'unica differenza rispetto al diagramma nell'affresco è che Raffaello adotta la nomenclatura originale greca, su cui è ricalcata quella latina di Boezio, ad esempio Epocdous rende ΕΠΟΓΔΟΟΝ.

I quattro numeri, 6, 8, 9, 12, sono collegati da archetti, e precisamente partendo dall'alto:

6 ∩ 8 diatessaron 9 ∩ 12 diatessaron → 8/6 = 12/9 = 4/3 proporzione sesquiterza

8 ∩ 9 epogdoon → 9/8 proporzione sesquiottava

6 ∩ 9 diapente 8 ∩ 12 diapente → 9/6 = 12/8 = 3/2 proporzione sesquialtera

6 ∩ 12 diapason → 2/1 proporzione doppia.

Ci si chiede che relazione c'è tra i rapporti 3/2, 4/3, 2/1, e gli intervalli di quarta, di quinta, di ottava delle note. L'ottava è l'intervallo tra il suono emesso da una corda libera, cioè senza ponticello, e il suono emesso dalla stessa corda con il ponticello nel punto di mezzo della corda, di qui il rapporto di 2 a 1. I Greci definirono l'intervallo di ottava come quello di massima consonanza, a titolo di esempio prendendo le note oggi in uso, si passa da un *do* al *do* consecutivo. Il secondo intervallo che i Greci stimarono di grande importanza per l'armonia, dopo l'ottava, è quello della quinta perfetta che, spostato il ponticello, corrisponde a un rapporto di 3 a 2 tra le lunghezze della corda vibrante che emettono le note *do-sol*. Viene poi l'intervallo di quarta perfetta, cioè *do-fa* con rapporto di lunghezza della corda vibrante di 4 a 3. Ovvero le sovrapposizioni di suoni consonanti in modo più armonioso, sono quelle che corrispondono ai suoni emessi da corde le cui lunghezze stanno tra loro nei rapporti 2/1, 3/2, 4/3. Ragionando in termini di frequenze se poniamo la frequenza del *do* uguale a 1, la frequenza del *do* consecutivo sarà uguale a 2, allora il *fa* avrà frequenza uguale a 1,333 = 4/3, mentre il *sol* avrà frequenza uguale a 1,500 = 3/2. Diapason, diapente, diatessaron, ossia gli intervalli di ottava, quinta, quarta, sono le consonanze-base della scala musicale pitagorica. Il termine «epogdoon» indica l'intervallo di seconda, cioè di un tono singolo, un intervallo non consonante, pertanto graficamente separato, una sorta di unità di misura della scala. In riferimento sempre al *do* avremo un *re* con frequenza 1,125 = 9/8. [16]

Della esistenza di queste relazioni tra suoni e numeri erano al corrente non solo i musici e i filosofi, le conoscevano anche gli architetti meglio informati. Ne dà notizia il solito Vitruvio parlando degli accordi sonori in relazione all'acustica dei teatri, che vanno progettati in modo da consentire a tutti gli spettatori le migliori condizioni di ascolto, riducendo gli effetti negativi di risonanza, di interferenza, di dispersione dei suoni:

> In li teatri anchora li vasi di metallo li quali si inestano in le celle socto li gradi, debbono esser colocate con le mathematiche overo musice ragioni. Et le defferentie delli suoni overo rembombationi le quali li greci le chiamano hechia e noi eccho se compongano et hordinanse nel circuito del teatro in modo che respondano alle

16 Il termine *Epogdoon* è reso con lettere greche maiuscole. La lettera D latina diventa la delta greca Δ. Per errore nell'affresco troviamo la lettera lamda.Λ.

> musice sinphonie overo concenti. Li quali concenti li chiamano Diathesaron, et Diapente, et Diapason, acciocché la voce del scenico suono essendo toccata con le conveniente dispositione e di fora con incremento cresciuta più chiara et più soave prevenga alle orecchi delli spectatori et auditori.

Discorsi che Leon Battista Alberti aveva riproposto nei capitoli V e VI del libro IX del *De re aedificatoria*[17].

In merito alla domanda sulle indicazioni, consigli, critiche e quant'altro Raffaello abbia ricevuto, è evidente che se si vuole risalire alle persone non si può andare oltre gli indizi, come nel caso del Pacioli. Riguardo ai testi consultati da Raffaello si possono raggiungere certezze come nel caso del *De architectura* di Vitruvio, oppure se non certezze tuttavia un elevato grado di probabilità come per la *Summa* e per l'*Arithmetica*.

Erano disponibili anche fonti di altro tipo. Lo schema dei numeri figurati e lo schema dei rapporti tra intervalli numerici e intervalli sonori li ritroviamo nei trattati di musica come la *Practica musicae*, di Franchino Gaffurio (1451-1522), testo ben conosciuto, stampato per la prima volta nel 1480, seguono altre sei edizioni fino a quella milanese del 1508, anno in cui Raffaello mette mano all'affresco.

Insomma, quelle sintetizzate nella lavagnetta pitagorica non erano conoscenze iniziatiche. È verosimile ipotizzare quindi che Raffaello fosse in grado, se non di scegliere in totale autonomia i disegni da tracciare nella lavagnetta, certamente di discutere proposte e suggerimenti in merito alla lavagnetta pitagorica. Con la diretta partecipazione all'edizione in volgare del *De architectura* Raffaello aveva peraltro raggiunto un livello di conoscenza del testo vitruviano che solo pochissimi a quel tempo potevano vantare, sia tra i dotti, sia tra i tecnici. Questo per dire che Raffaello si rendeva conto di quello che andava dipingendo, e non copiava pedissequamente qualche disegno altrui.

La storia non finisce qui perché alle consonanze terrestri corrispondono le consonanze celesti, Pitagora è l'unico tra i mortali a udire il suono delle sfere cristalline che portano incastonati i pianeti, una musica cosmica che ha le medesime armonie della musica su questa Terra [Fig. 7].

17 Alberti (1565, 258-262).

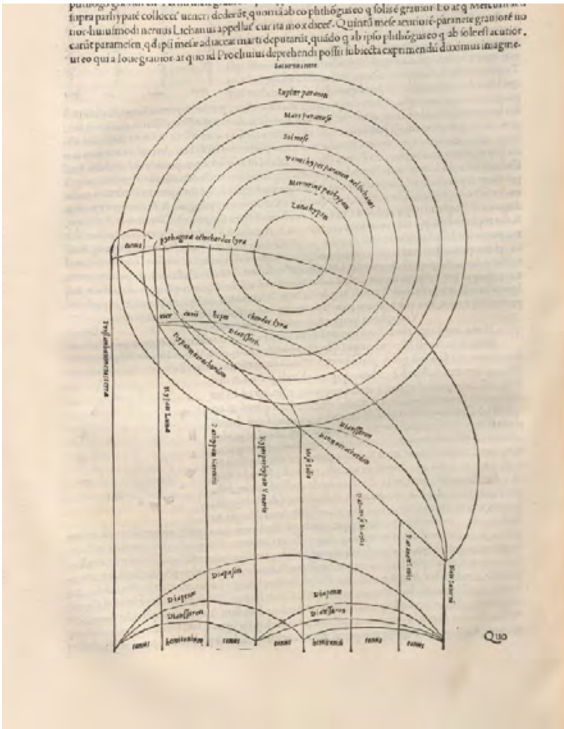


Fig. 7 Valla (1501, libro V, cap. I, ff. non num).
Corrispondenze tra orbite planetarie e intervalli musicali consonanti.

L'affresco indica il testo che fornisce il quadro generale della dottrina pitagorica, è il *Timeo*, il *Dialogo* più noto, il libro che Platone porta con sé, l'opera che squaderna il retroterra della lavagnetta pitagorica [Fig. 7]. Ecco quindi che alle armonie musicali si associano le armonie delle orbite dei pianeti, a loro volta legate alle proporzioni tra i cinque corpi regolari – tetraedro, ottaedro, cubo, dodecaedro, icosaedro –, solidi geometrici che a loro volta costituiscono la 'struttura' degli elementi: tetraedro-fuoco, cubo-terra, ottaedro-acqua, icosaedro-aria, dodecaedro-cielo. Dottrine che affascinano anche chi non è pitagorico, ma è sensibile, come lo era Raffaello, alle proporzioni tra le cose, alla scoperta di quelle armonie nascoste che, come dicevano gli antichi filosofi, sono più potenti delle armonie manifeste. I numeri e la musica sicuramente ne partecipavano.

In secondo luogo nel proemio al *De arithmetica* Boezio, seguendo Nicomaco, afferma il primato della aritmetica sulle altre discipline del quadrivio da essa dipendenti, ossia la geometria, l'astrologia, la musica. In quanto base della matematica, l'aritmetica è la via di accesso alla conoscenza di quei principi di armonia che regolano l'ordine del mondo. Boezio dichiara che «fino dalla primigenia natura tutte le cose sono state formate secondo rapporti numerici, tale era infatti il modello del Creatore»[18]; il che è molto pitagorico, e molto biblico, un versetto del *Libro della Sapienza* dice che Dio creò il mondo secondo «numero, peso e misura», frase che anche Pacioli ripeteva volentieri. Pertanto senza la conoscenza delle discipline del quadrivio «non è possibile ricercare correttamente la verità (...). Chi le disprezza, cioè queste che sono sentieri di sapienza, dichiaro che sta filosofando in modo scorretto dato che la filosofia è amore della sapienza»[19]. Questa è appunto una presa di posizione sulla filosofia molto vicina a quella dell'affresco.

2. La lavagnetta euclideo-archimedea

Nella lavagnetta pitagorica, collocata nell'affresco a sinistra in basso, sono rappresentate due arti del quadrivio, l'aritmetica e la musica, nella parte opposta dell'affresco si dovrebbero trovare le altre due arti, la geometria e l'astronomia, o meglio l'astronomia-astrologia che all'epoca facevano tutt'uno, dire astronomo e dire astrologo era indicare la stessa persona

Si nota subito che la situazione matematica nella parte destra dell'affresco è più complicata rispetto a quella 'pitagorica' nella parte sinistra, infatti oltre a una lavagnetta ci sono un globo terrestre e un globo celeste, in mano ad altrettanti personaggi. La lavagnetta è qualificata 'euclidea' in senso generico, per rendere l'idea della geometria come disciplina dimostrativa per eccellenza, lasciando per il momento in sospeso la questione se questa fosse l'identità della matematica allora riconosciuta e se il personaggio, compasso in mano, chino sulla lavagnetta, sia Euclide.

Per evidenti ragioni compositive la lavagnetta euclidea, identica come forma e colori a quella pitagorica, è disposta in modo diverso: la lavagnetta pitagorica è in posizione quasi verticale, la lavagnetta euclidea è messa sul pavimento in posizione orizzontale, col risultato che la figura geometrica tracciata – una stella a sei punte con un rettangolo all'interno – viene fortemente scorciata. La presenza di una simile figura pone questioni interpretative non tutte risolvibili in modo conclusivo, come si riesce a fare per le figure nella lavagnetta pitagorica. Il che è piuttosto strano perché ci si aspetterebbe tutt'altro, ossia da un Pitagora partecipe dei misteri orfici, figura già leggendaria nell'Antichità, dovrebbero scaturire cose matematiche oscure e confuse rispetto a quelle provenienti da un settore della matematica come la geometria euclidea fondato su principi solidi e costruito con sicure dimostrazio-

18 Boezio (1491, 156v).

19 Ivi, 156r.

ni. Invece accade il contrario. La presenza di questo fatto 'strano' pone due questioni: se il personaggio raffigurato nelle sembianze dell'architetto Donato Bramante sia proprio Euclide; se l'idea che Raffaello, o chi intorno a lui, si era fatto della matematica sia diversa dalla nostra, cioè da come oggi intendiamo la geometria euclidea. In questo caso la 'stranezza' dipenderebbe da noi. Partiamo da alcuni dati di fatto. Euclide, è rappresentato con un compasso in mano, chino su una lavagnetta che giace sul pavimento [Fig. 8]. Diversamente da un Pitagora circondato da alcuni discepoli, eppure concentrato a mettere per iscritto le sue dottrine, il nostro geometra è colto nel mezzo di una lezione impartita a quattro discepoli.

Fig. 8 Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene*, particolare del gruppo dei geometri (Public Domain).

Raffaello crea una situazione dinamica: nella lavagnetta c'è già il disegno di una figura piuttosto complicata, le punte del compasso sfiorano la superficie della lavagnetta, tra poco andranno a fissarsi in qualche punto della figura. Siamo nel momento culminante della lezione, Raffaello ha dipinto un sentimento, uno spirito, in un certo senso ha partecipato, ha avuto parte e successivamente stima tra gli allievi di Bramante.

Per questo la tradizione critica a partire dal Vasari ha sempre optato per Euclide raffigurato nelle sembianze dell'architetto Donato Bramante. È bene comunque rispondere alla domanda su come venivano considerati Euclide e Archimede tra la fine del Quattrocento e i primi del Cinquecento.

Su Archimede fioriva una aneddotica alimentata da autori antichi, i più noti erano Vitruvio e Plutarco. Vitruvio nel *De architectura* riferisce l'episodio della corona d'oro del tiranno di Siracusa Ierone, che Archimede scopre composta da una lega oro-argento anziché di oro puro.


quod plus defluxerat aquæ in corona, quã in maſſa ratiocinatus, depræhẽ
dit argenti in auro mixtionem, & manifeſtum furtum redemptoris.

Tranſferatur mens ad Architæ tarentini & Eratoſthenis cyrenei cogitata,
Hi enim multa & grata a mathematicis rebus hominibus inuenerunt, Itaq;

Fig. 9 Vitruvio (1511, 85v).

Il titolo avverte che questa, curata da fra Giocondo, è la prima edizione di Vitruvio corredata da figure. Notevole la rispondenza dell'immagine alla situazione effettiva. Il recipiente è un parallelepipedo così è possibile determinare il volume degli oggetti immersi misurando l'innalzamento del livello dell'acqua. Le due sfere di oro e di rame di massa nota, e la corona di massa nota, vengono immerse per misurare i rispettivi volumi [Fig. 9].

È l'episodio del bagno dove Archimede ha l'idea che gli consente di risolvere il problema lasciando intatta la corona, ossia di determinare il volume della corona tramite immersione, e di fare il rapporto massa-volume per trovare la densità del metallo di cui era fatta la corona, confrontandola poi con la densità dell'oro.

Un altro autore largamente noto era Plutarco che nella *Vita di Marcello* descrive i terribili marchingegni bellici escogitati da Archimede in difesa di Siracusa, e l'uccisione di Archimede da parte di un soldato romano. Per completare l'arsenale bellico di Archimede vanno aggiunti gli specchi ustori, impresa non riportata nei testi dell'antichità, formatasi successivamente in ambiente bizantino, creduta vera come le altre.

Di Archimede matematico, oltre al valore di $\pi = 3 + 1/7$, erano note due regole per il calcolo della superficie e del volume della sfera: la superficie della sfera vale quattro volte la superficie del suo cerchio massimo; moltiplicando la superficie della sfera per il semidiametro e dividendo per tre, si ottiene il volume. Per il resto la matematica di Archimede rimaneva sconosciuta sia per il ridottissimo numero dei manoscritti in circolazione, sia perché la sua geometria risultava quasi incomprensibile anche per le menti più brillanti dell'epoca. Archimede è un autore difficile, scrive per matematici, presuppone la conoscenza di numerosi risultati, tratta argomenti più avanzati rispetto ai segmenti e alle circonferenze, ad esempio le spirali, le coniche, i solidi di rotazione[20]. Ma questo è l'Archimede della seconda metà del Cinquecento, dopo la stampa 'ufficiale' delle opere, è l'Archimede che il giovane Galileo leggerà con «infinito stupore»; pochi decenni prima la sua fama era quella del genio inventivo, una sorta di Archimede 'mago'. Commenta Vitruvio a proposito dell'episodio della corona: «Scoperta che sembra elaborata con una capacità inventiva davvero sconfinata»[21]. L'umanista Francesco Lutio da Casteldurante che pubblica a Venezia nel 1524 una traduzione in volgare del *De architectura*, dipinge Archimede in questi termini: «Archimede: questo si fu uno homo sapientissimo, il quale fu inventore de molte cose machinatorie, et secondo alcuni anchora de le artegliarie»[22]

Molto più rarefatti i 'casi memorabili' della vita di Euclide. Proclo Diadoco (410-485c.) autore di un commento al primo libro degli *Elementi*, racconta che il re Tolomeo primo chiese a Euclide se esisteva un modo più agevole per apprendere la geometria – si sospettano tentativi falliti di comprendere gli *Elementi* –, Euclide rispose che in geometria non esistono vie regie, privilegiate, la "via" è unica. Niente di paragonabile alle gesta di Archimede, in compenso gli *Elementi* erano un'opera largamente nota fino dal Medioevo, il testo-base per l'apprendimento della geometria riprodotto in centinaia di esemplari manoscritti[23]. Chi aveva frequentato la scuola d'abaco e non aveva mai visto una copia degli *Elementi*, sapeva che le regole per la risoluzione dei problemi geometrici derivavano da proposizioni dimostrate da Euclide negli *Elementi*, ad esempio

20 Cfr. Clagett (1964); Clagett (1976); Clagett (1978, 328-331); D'Alessandro e Napolitani (2012); Napolitani e D'Alessandro (2012).

21 Vitruvio (1511).

22 Vitruvio (1524, pag. non num).

23 Murdoch (1971, 437-459); Pagli (2000, 201-223); Folkerts (2005).

quello che chiamiamo teorema di Pitagora era conosciuto come «penultima del primo di Euclide» cioè la penultima delle 48 proposizioni del primo libro degli *Elementi*. Proprio in forza del ruolo 'magistrale' che ha storicamente ricoperto, è quasi sicuro che il personaggio col compasso in mano, contornato da discepoli attenti e stupiti, sia Euclide. La certezza viene a nostro parere raggiunta in forza di un ulteriore dato a favore di Euclide. L'edizione a Venezia nel 1505 delle opere di Euclide curata dall'umanista Bartolomeo Zamberti utilizzando fonti greche, porta un titolo eloquente, Euclide oltre ad essere nato a Megara e a figurare come filosofo, risulta appartenere alla scuola filosofica platonica [Fig. 10].

Fig. 10 Zamberti (1505).

Nella edizione greco-latina delle opere, stampata a Basilea nel 1544 a cura di Venatorius, Archimede Siracusano riceve la qualifica di filosofo e geometra. senza altre specifiche in merito a quale scuola filosofica. Non sembra una differenza di poco conto perché segnala la diversa luce sotto cui erano visti i due matematici.

Fig. 11 Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene,* particolare della lavagnetta euclidea (Public Domain).

Nella lavagnetta spicca un esagramma [Fig. 11] formato da due triangoli equilateri uguali, con lo stesso centro, ruotati uno rispetto all'altro di 60° che s'intersecano formando la stella a sei punte. Al centro della stella si forma un esagono, all'interno dell'esagono un rettangolo con una sola diagonale. Questa è la figura in vista ortogonale, poi resa di scorcio [Fig. 12].

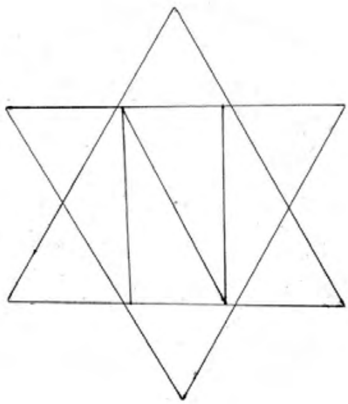


Fig. 12 Vista ortogonale

C'è da discutere su come la figura sia stata trasferita nell'affresco. Nello splendido cartone dell'affresco conservato alla Biblioteca Ambrosiana a Milano troviamo ben disegnate la lavagnetta e il compasso, tuttavia nella superficie della lavagnetta non è stato ancora disegnato niente. Lo stesso vale per la lavagnetta pitagorica. Il che fa pensare che il disegno è stato fatto su un foglio a parte, resta però da capire se la figura nel foglio fosse già scorciata e bisognava solo copiarla, oppure se nel foglio c'era la figura non scorciata. In tal caso si doveva ricorrere alla tecnica della vista a sfioro tenendo il foglio inclinato in posizione quasi orizzontale di modo che la figura appare appunto scorciata.

Ritorniamo nello studiolo del duca Federico da Montefeltro, dove è lecito pensare che Raffaello abbia visto per la prima volta una raffigurazione di Euclide. La dedica al grande matematico alessandrino è una delle 'stranezze' di questa storia.

«Euclidi Megaren[si] ob comprehensa Terrae spacia lineis centroque Fed[ericus] dedit invento exactissimo».

Federico dedicò [questo ritratto] a Euclide di Megara per aver misurato con linee le superfici della Terra e per averne determinato con grande precisione il centro.

Fig. 13 Giusto di Gand, *Euclide*, Studiolo di Federico da Montefeltro, Urbino (Public Domain).

A parte il citato errore di identificare il filosofo Euclide di Megara con il matematico Euclide di Alessandria, effettivamente un Euclide cartografo e addirittura geodeta, come celebra la dedica, è una figura che non collima con l'immagine di 'filosofo platonico' dell'autore degli *Elementi*, anzi è l'opposto. L'errore sta nell'aver confuso Euclide Alessandrino con il geodeta Eratostene, oppure c'è dell'altro? Giusto di Gand ci presenta un Euclide munito di compasso e lavagnetta [Fig. 13]. Possono dirci qualcosa?

Il compasso era una scelta pressoché obbligata grazie alla secolare tradizione iconografica che lo mette in mano sia a matematici «speculativi», sia ad astronomi, topografi, architetti e simili, sia al «sommo geometra», Dio che ha creato l'universo mondo secondo «numero e misura». L'altro oggetto tipico era la lavagnetta, che non godeva di altrettanto illustre tradizione iconografica, ma era largamente usata per fare conti, per abbozzare disegni, scritti; in un comparto dello Studiolo troviamo appunto una lavagnetta.

Gli oggetti dipinti non aiutano a decidere. Tra Euclide geometra-filosofo ed Euclide cartografo-geodeta, lo stesso Giusto di Gand sembra indeciso. Euclide è 'fermato' mentre sta per disegnare qualcosa. Platonicamente si vuole cogliere il passaggio dalla pura visione intellettuale degli oggetti matematici alla rappresentazione materiale degli stessi. Nell'ipotesi di un Euclide-Eratostene una punta del compasso andrebbe a fissare il centro della Terra, mentre l'altra punta traccerebbe il contorno.

3. Differenti matematiche

Il già citato *Doppio ritratto* attribuito a Iacopo de' Barbari (1495) fornisce spunti di rilievo per l'interpretazione della tavoletta euclidea. Il dipinto compare negli inventari del Palazzo ducale di Urbino del 1582, 1599, 1609, 1631, conservato nell'appartamento dei Melaranci – l'appartamento degli ospiti al piano nobile del Palazzo –. A questo proposito è importante ricordare che nella parte inferiore della tavola su cui è dipinto il *Doppio ritratto*, c'era la dedica, poi tagliata via, a Guidubaldo da Montefeltro, «Divo Principi Guido», il che assicura la presenza del dipinto a Urbino dal 1495 o subito dopo[24].

Fig. 14 Iacopo de Barbari, *Doppio ritratto* (Public Domain), Museo di Capodimonte, Napoli.

Sul tavolo il solito compasso, una squadra e una lavagnetta identica a quelle dell'affresco – era una forma tipica – recante per di più sul bordo la scritta «Euclides», una copia della prima edizione degli *Elementi* di Euclide, Venezia 1482, dipinta con tale precisione da riconoscere che la proposizione indicata dal Pacioli,

24 Sangiorgi (1976, 205; cfr. anche 40, 57, 156).

è la proposizione 8 del XIII libro: «Omnis trianguli equilateri quod a latere suo quadratum describitur, triplum est quadrato dimidii diametri circuli a quo triangulus ipse circumscribitur». Nelle edizioni moderne è la proposizione 12: il quadrato del lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è il triplo del quadrato del raggio della circonferenza [Fig. 14]. Insomma sul tavolo figurano i ferri del mestiere dei matematici. Sulla lavagnetta pacioliana è disegnato un triangolo presumibilmente equilatero inscritto in una circonferenza, e un misterioso segmento con un estremo su un vertice del triangolo mentre l'altro estremo resta come sospeso dentro il cerchio senza terminare in qualche punto particolare.

Fig. 15 Iacopo de Barbari, *Doppio ritratto* (Public Domain), Museo di Capodimonte, Napoli, particolare della lavagnetta.

Ai lati della lavagnetta due poliedri, un dodecaedro e un rombicubottaedro, quest'ultimo fatto di vetro, appeso non si sa dove, contiene acqua, lo attraversa un fascio di raggi luminosi che subisce una riflessione e una rifrazione. Il dipinto restituisce l'idea di matematica come scienza certa dei teoremi, e insieme come conoscenza di realtà arcane, perché da tali realtà di ordine superiore viene il rombicubottaedro raffigurato come un oggetto matematico-metafisico che scaturisce da un'altra dimensione, il fondo nero retrostante [Fig. 15]. Non è da meno l'altro poliedro, il dodecaedro che nella cosmologia pitagorico-platonica è associato alla quintessenza ovvero a ciò di cui è fatto il «cielo» secondo l'espressione dello stesso Pacioli.

Se Raffaello ha visto il quadro, sicuramente è rimasto impressionato, il *Doppio ritratto* è un'opera unica, piena tanto di richiami e di suggestioni simboliche, quanto di 'vera' matematica, una distinzione che a quel tempo non sussisteva. Il dipinto traduce visivamente una concezione della matematica di indubbio fascino, al punto che tuttora ne rimaniamo colpiti. Pacioli ha diretto passo dopo passo la mano di Iacopo de' Barbari indicando fin nei minimi particolari cosa doveva dipingere, voleva che l'opera fosse il manifesto della sua matematica, il suo 'videocurriculum'[25].

La matematica del *Doppio ritratto* si distingueva per il rigore logico, tutti avrebbero sottoscritto che «le mathematiche tengono di certezza il primo luogo»: le dimostrazioni dei teoremi, come l'ottavo del tredicesimo libro degli *Elementi*, sono inattaccabili, tuttavia come avverte il rombicubottaedro con i suoi enigmatici effetti di luce, la matematica era intesa anche in senso esoterico, come possesso di conoscenze speciali, come via di accesso a verità recondite – vale quello che si è detto di Pitagora –. Secondo la filosofia platonica gli oggetti matematici esistono realmente in un mondo delle idee, la loro è una realtà eterna, immutabile, paragonata alla precarietà delle cose del mondo terreno. Matematico è l'ordine del cosmo, secondo quanto detto a proposito della tavoletta pitagorica. Le idee sulla realtà di ordine superiore degli oggetti matematici, le dottrine sulle proprietà degli stessi, si accordano facilmente con le svariate correnti numerologiche, cabalistiche e magiche che fanno parte della storia, diciamo 'eretica' o perlomeno eterodossa, della matematica. Se, come riconosce la critica, l'affresco è pervaso da una concezione platonica della filosofia, questo doveva essere il punto di vista che Raffaello aveva sulla matematica, sicuramente più vicino a quello del Pacioli che al nostro. Si può dire che Raffaello guardava Euclide con gli occhi del Pacioli, pertanto il disegno sulla lavagnetta doveva rendere l'idea che Raffaello si era fatto della eccezionalità di Euclide. Tutto ciò assegnava al nostro pittore il difficile compito di trovare un'immagine geometrica espressiva sia dell'Euclide 'matematico-deduttivo' degli *Elementi*, sia dell'Euclide che evoca i fenomeni di propagazione della luce dentro un imprevedibile rombicubottaedro che sembra provenire da altre dimensioni, se vogliamo generalizzare, sia della componente mistico-magica, sia della componente logico-razionale della matematica. All'epoca entrambe facevano parte della identità della matematica, erano due facce complementari della stessa medaglia. Mettiamo in conto che Euclide è anche l'autore dell'*Ottica* dove tratta della visione e della *Catottrica* sulla riflessione della luce.

Una impressionante testimonianza del particolare status in cui si trovava la matematica la fornisce Nicolò Tartaglia nella allegoria posta all'inizio della *Nova scientia*[26]. In primo piano Euclide nel ruolo di «ianitor», portinaio, presidia l'ingesso di un'area circolare recintata da un'alta muraglia, una specie di torrione a sua volta sormontato da una muratura di minore diametro. All'interno di questa nel punto più alto sta la Filosofia con al fianco Platone e Aristotele che impediscono a chicchessia di entrare [Fig. 16].

25 Baldasso (2010, 83-102); Gamba (2010, 81-97); Baldasso e Logan (2017, 130-149).

26 Tartaglia (1537).

Nel torrione sottostante, al centro Tartaglia in posizione più avanzata rispetto alle altre discipline, le quattro arti del quadrivio, Aritmetica, Geometria, Astronomia, Musica, indispensabili basi di conoscenze. A queste discipline può accedere solo chi possiede solide conoscenze geometriche. Un uomo cerca di entrare senza passare per la porta presidiata da Euclide, scavalcando la muraglia con una scala, il tentativo fallisce, la scala non è abbastanza lunga ovvero le sue conoscenze geometriche sono insufficienti Altri uomini stanno alla porta in attesa che Euclide li faccia entrare una volta accertate le loro conoscenze matematiche. Tartaglia porta alle estreme conseguenze lo 'slogan' «Nessuno entri se ignora la geometria» sventolato da Platone che nomina Euclide giudice unico di chi entra o non entra nella torre matematica. Il tutto salutato da colpi di artiglierie, anche le traiettorie dei proietti sono matematica.

Fin qui niente di strano, un Euclide introduttore alle «scientie matematiche» le quali a loro volta sono la necessaria premessa per un itinerario filosofico che culmina nelle somme autorità di Platone e di Aristotele, era un'idea largamente accettata, messa perfino nel titolo delle edizioni delle opere di Euclide, come aveva fatto lo Zamberti nel 1505. La sorpresa viene dai personaggi all'interno della cinta muraria. In prima fila Tartaglia con al fianco l'aritmetica e la geometria. Dietro il folto gruppo delle «discipline mathematiche» di cui fanno parte, oltre alla musica e all'astronomia, la prospettiva, la geomanzia, la necromanzia, il sortilegio, l'orospizio, l'auspizio, la chiromanzia.

Fig. 16 Tartaglia (1537).

Cinque anni dopo nel 1543 Tartaglia pubblica a Venezia la traduzione in volgare degli *Elementi* di «Euclide Megarense philosopho» – la prima in una lingua parlata – nella prefazione ribadisce che l'aritmetica «con le sue regole calculatorie, et virtù de' suoi numeri, dà la vita all'arte giuditiaria detta astrologia, et similmente alla pyromantia, hidromantia, necromantia, geomantia, horospitio, aruspitio, augurio, auspitio et altri sortilegii»[27]. Tartaglia è un matematico di valore, tra i migliori nel Cinquecento, trova del tutto normale la presenza tra le «scientie mathematiche» di pratiche e di conoscenze che giudichiamo estranee, superstiziose, assurde, ma che Tartaglia e tutti, o quasi, consideravano facenti parte della matematica perché utilizzavano «le sue regole calculatorie, et virtù de' suoi numeri». La stessa cosa valeva per le figure geometriche dotate di speciali «virtù». Nelle intenzioni di Tartaglia questi 'incroci' conferivano prestigio alla matematica.

Si è cercato di rendere presente come Raffaello e i suoi contemporanei intendevano la matematica, premessa utile per comprendere cosa volesse dire tradurla in immagini come appunto la figura dell'esagramma con rettangolo incluso. Perché ricorrere ad una figura esotica che non compare in nessuna opera di Euclide e di Archimede? Perché non mettere la figura del teorema più citato e più adoperato da tutti i matematici sia «speculativi» che «pratici», ossia il «penultimo del primo libro di Euclide», oggi noto come teorema di Pitagora? In questo frangente Raffaello si trovava in una condizione diversa da quella in cui si era trovato Pacioli quando doveva decidere la composizione del *Doppio ritratto*. Nel *Doppio ritratto* la figura geometrica disegnata nella lavagnetta si riferisce a un problema specifico, concorre a rappresentare Pacioli maestro nel mezzo di una lezione, o forse più sottilmente vuole sfidare chi guarda il dipinto a completare la figura, a risolvere il problema su dove va a finire l'altro estremo del segmento. Per il resto, a celebrare la matematica secondo la concezione divulgata dal Pacioli, provvedeva tutto il complesso degli oggetti che popolano il *Doppio ritratto*. Raffaello si trova in una situazione ben più esigente, perché il tema generale dell'affresco era la filosofia, quindi il carico simbolico e contenutistico della geometria, competeva a Euclide, o a chi per lui, e alla lavagnetta, così come l'aritmetica e la musica competevano alla lavagnetta pitagorica. Decidere quale figura disegnare nella lavagnetta diventava un 'rebus' tutt'altro che facile da risolvere, soprattutto nell'ambito di un affresco come la *Scuola di Atene* dove, si può dire, ogni cosa rimanda ad altro. Giustamente Glen Most ha osservato che far chiarezza sulla enigmatica figura geometrica tracciata nella lavagnetta, è la condizione neces-

27 Tartaglia (1543, 3v).

saria per stabilire l'identità dei personaggi che le stanno intorno, primo fra tutti quello che brandisce con decisione il compasso, e per farsi un'idea su l'argomento della lezione in corso.

4. Storia geometrica dell'esagramma

La figura disegnata nella lavagnetta euclidea è palesemente una figura ibrida, nata dalla inclusione di un rettangolo in un esagramma. Per quanto sappiamo è la prima volta che compare una figura geometrica con queste caratteristiche. Presi separatamente rettangolo ed esagramma hanno una loro storia che li vede separati fino all'incontro nella cosmica lavagnetta. Soprattutto la storia dell'esagranna è quanto di, contradditorio, 'plurisimbolico' si possa immaginare, di qui i nomi che riceve, Sigillo di Salomone, Scudo di Davide. È difficile scovare una figura geometrica con una storia più rocambolesca di quella dell'esagramma, che fa la sua apparizione nei tempi e nei luoghi più disparati per i più diversi scopi e ragioni. Basti dire che l'etnografo portoghese J. Leite de Vasconcellos in un saggio del 1918 pubblica 237 immagini del Sigillo di Salomone[28]. Naturalmente l'esagramma ha anche una storia matematica; per il momento rimaniamo nell'ambito di questa cercando di portare in luce i momenti-chiave del suo svolgimento e i punti d'intersezione con la storia del rettangolo. Ci interessa capire come mai dall'entourage di Raffaello sia uscito un marchingegno geometrico mai visto prima, ottenuto includendo un rettangolo in un esagramma, una figura a quanto pare inedita, e nonostante questo tenuta in così alta reputazione da essere chiamata a rappresentare la geometria davanti al consesso filosofico. E' in discussione il contenuto matematico della lavagnetta, la sua posizione, la scena circostante, aspetti che dovevano avere un filo conduttore. La partecipazione di Raffello alle discussioni in merito è certa, come è altrettanto certo che non sappiamo né sapremo quali argomenti vennero prodotti. Abbiamo davanti agli occhi il risultato finale: una lavagnetta in posizione orizzontale prospetticamente ardua, una figura geometrica già complicata di per sé, resa strana, difficile, dalla deformazione prospettica. In sostanza due pezzi di bravura, quello di un pittore e quello di un matematico; messi insieme, in prima battuta si può sostenere che il marchingegno geometrico sia piaciuto a Raffaello per ragioni estetiche imposte dalla scena affrescata [Fig. 17].

28 Scholem (2008, 70).

Fig. 17 Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene,* particolare della lavagnetta euclidea (Public Domain).

Occorreva una figura geometrica di sicuro effetto visivo, geometricamente 'densa', problematica al punto da giustificare la presenza di un personaggio di primissimo piano come Euclide, circondato dagli allievi, nel pieno di una lezione 'drammatica' come segnalano i gesti dei quattro allievi. In tale modo si contrappesava il gruppo dei pitagorici nel lato opposto dell'affresco. È plausibile che prima si sia pensato all'esagramma, figura di sicuro impatto visivo, poi al rettangolo. In questa circostanza il contributo di Raffaello era necessario per decidere la posizione delle tavolette, specialmente quella euclidea, che doveva ospitare una figura di difficile «degradatione» come avrebbe detto Piero della Francesca. Inoltre si osserva che il rettangolo con una sola diagonale, incluso al centro dell'esagramma, occupa una posizione privilegiata, questo significa che in qualche modo costituisce il nucleo del discorso geometrico che la lavagnetta vuole presentare.

Se all'Euclide di Raffaello qualcuno avesse chiesto in quale opera aveva trattato gli esagrammi, la risposta sarebbe stata che sull'esagramma non aveva scritto niente; tuttavia nell'ultimo corollario della proposizione 32 del primo libro degli *Elementi* aveva escogitato una bella dimostrazione su una figura simile all'esagramma e famosa perché simbolo dei pitagorici, cioè la stella a cinque punte. Il corollario chiedeva di dimostrare che la somma dei cinque angoli ai vertici della stella pitagorica è uguale alla somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi, cioè di due angoli retti, 180° [Fig. 18][29].

29 Euclide (1482, corollario prop. 32 libro I, ff. non num).

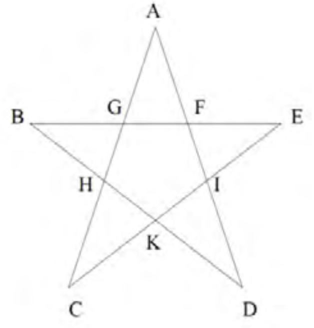


Fig. 18 Stella pitagorica.

La dimostrazione è impeccabile. Considera nella stella pitagorica i triangoli *BDF* e *CEG*. Applica la proposizione 32 – l'angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti – al triangolo *BDF* che ha come angolo esterno $A\dot{F}G$, per cui $A\dot{F}G = \dot{B} + \dot{D}$; applicata al triangolo *CEG* con angolo esterno $A\hat{G}F$ si ha $A\hat{G}F = \hat{C} + \hat{E}$. Date queste uguaglianze e dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, si ha che $\hat{A} + \dot{B} + \hat{C} + \dot{D} + \hat{E} = 180°$. Un risultato paradossale: gli angoli dei vertici di cinque triangoli misurano come gli angoli di un solo triangolo.

L'Euclide che Raffaello dipinge è quello degli *Elementi* secondo la versione latina realizzata da Giovanni Campano da Novara (1220-1296) utilizzando soprattutto fonti arabe. Nelle versioni da fonti greche la proposizione 32 non ha corollari, come è possibile riscontrare nell'edizione veneziana degli *Elementi* del 1505 curata dall'umanista Bartolomeo Zamberti.

Nella storia della geometria i poligoni stellati hanno lasciato una traccia singolare, perché una volta presa la stella a cinque punte come emblema dalla scuola pitagorica, nessuno nell'Antichità si sarebbe occupato di poligoni stellati. Una circostanza davvero anomala, ammesso che le cose siano andate realmente così. Quella che sembra sia mancata, prima ai geometri greci poi al Campano, è l'intuizione che la stella pitagorica fa parte di una nuova classe di figure, quella dei poligoni stellati. Dimenticanza sconcertante in quanto per i poligoni stellati continuano a valere i teoremi della geometria euclidea, risorsa indispensabile per ogni indagine in materia. Campano non assegna alla figura un nome specifico, la considera una costruzione fatta sul pentagono mandando da ogni vertice le due diagonali ai due vertici opposti. Da *A* a *C* e *D*, da *B* a *D* e *E*, da *C* a *A* e *E*, da *D* a *A* e *B*, da *E* a *B* e *C*.

Chi si rende conto di avere individuato una nuova classe di figure geometriche è Thomas Brawardine (1295c.-1349) arcivescovo di Canterbury nonché matematico e addirittura ‘fisico teorico’ per gli studi sul moto. Bradwardine dichiara di seguire le tracce di Euclide, di Boezio e di Campano, quest’ultimo, nota, ha sfiorato accidentalmente i poligoni stellati trattando il pentagono[30]. Bradvardine dichiara di essere il primo a fare uno studio specifico sui poligoni stellati che distingue chiamandoli «figurae egredientium angulorum» – figure ad angoli sporgenti –. Si ottengono dai poligoni regolari prolungando i lati modo che i prolungamenti a due a due s’incontrino formando dei triangoli, l’esagramma è un poligono stellato costruito partendo da un esagono regolare [Fig.19].

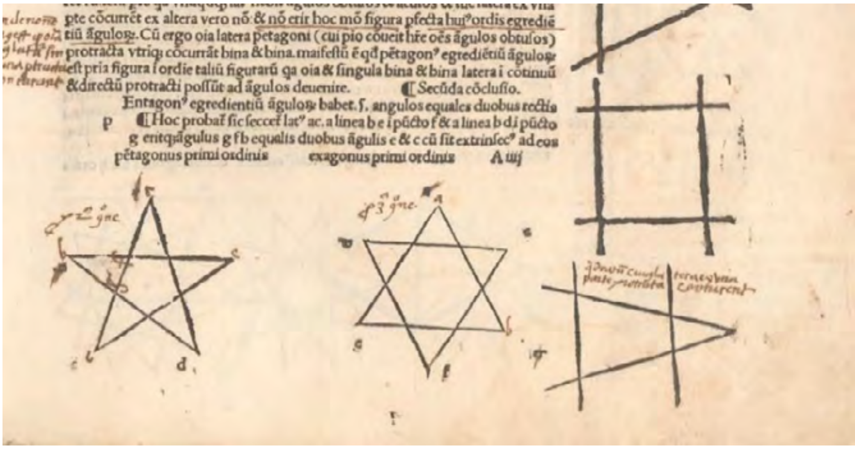


Fig. 19 Bradwardine (1495).

Bradwardine inizia un’indagine sulle proprietà dei poligoni stellati in generale, ad esempio cerca la relazione tra la somma degli angoli dei vertici e il numero dei vertici, l’enunciato è il seguente: passando da un poligono stellato al successivo la somma degli angoli dei vertici aumenta di due angoli retti. L’esagramma è formato da due triangoli equilateri pertanto la somma degli angoli dei vertici è di 360° = 60° × 6, due angoli retti in più rispetto al pentagono stellato. Proseguendo, l’ottagono stellato è formato da due quadrati, la somma degli angoli dei vertici è 720° = 90° × 8, il conto torna perché avendo saltato l’ettagono stellato l’aumento è di quattro angoli retti anziché di due. Il decagono è formato da due pentagoni la somma è 1080° = 108° × 10, quattro retti in più rispetto all’ottagono stellato.

30 Bradwardine (1495, ff. non num).

Bradwardine si dice certo che tutti i poligoni stellati a numero pari di vertici seguono quella regola ma dubita che valga anche per i poligoni a numero dispari di vertici. È vero che gli angoli dei vertici dell'ettagono e dell'ennagono stellato seguono la regola, tuttavia Bradwardine non è sicuro che questo si verifichi sempre, si rende conto di non possedere una dimostrazione generale, valida per qualsiasi numero di vertici [Fig. 20].

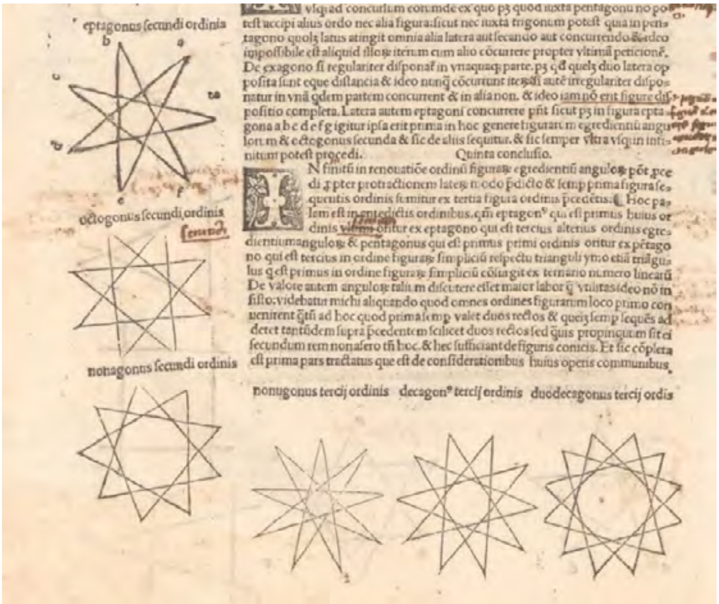


Fig. 20 Bradwardine (1495).

Alla trattazione dei poligoni stellati Bradwardine dedica alcune pagine del *Breve compendium artis geometrie*, opera che si colloca nella tradizione della cosiddetta 'geometria speculativa' per indicare la geometria che fa capo alla versione ridotta e semplificata degli *Elementi* di Euclide – solo i primi quattro libri e solo gli enunciati – realizzata da Severino Boezio (475-525) e diffusa nel Medioevo e nel Rinascimento in testi manoscritti spesso rimaneggiati con l'aggiunta di materiali tratti da altre fonti. Alla geometria si affiancavano le *Institutiones arithmeticae* ossia la 'aritmetica speculativa', che Boezio prende dalla tradizione pitagorica.

Dopo Bradwardine i poligoni stellati rimangono nell'ambito degli studi matematici, seppure come tema secondario; si mantiene tuttavia un certo interesse per questo genere di figure, anche per ragioni non matematiche. Un esempio del perdurante interesse per i poligoni stellati in tempi vicini a Raffaello, anzi proprio negli anni dell'affresco, lo forniscono frate Luca Pacioli e il filosofo e matematico francese Charles de Bouelles (1470c.-1553).

Pacioli nell'edizione degli *Elementi*, Venezia 1509, che si proponeva di emendare il testo del Campano, aggiunge ai corollari della proposizione 32 un commento in cui spiega che si tratta di una «figura egredientium angulorum», che si costruisce prolungando i lati di un poligono, e che tale poligono deve avere almeno cinque lati perché i prolungamenti si intersechino a due a due formando una figura ad «angoli sporgenti»[31].

I poligoni stellati, esagramma compreso, sono quindi figure 'euclidee' a tutti gli effetti, tanto che compaiono anche nell'edizione parigina degli *Elementi* del 1516, che riporta in parallelo sia la versione del Campano, sia quella dello Zamberti.

Il tema degli esagrammi è ripreso nel 1503 dal filosofo francese Charles de Bouelles che enuncia senza dimostrazione una serie di proprietà geometriche di queste figure, vale la pena riportarle perché in un certo senso danno la parola all'Euclide-Bramante dipinto da Iacopo de barbari. E' probabile che Raffaello, o chi per lui, le avesse presenti quando rifletteva e quando dialogava con qualche cultore di cose matematiche su come congegnare il gruppo dei 'geometri'; potrebbero essere queste le cose che Euclide-Bramante sta spiegando agli allievi, servendosi del compasso che ha in mano per mostrare uguaglianze e rapporti tra le parti dell'esagramma[32].

Il punto di partenza è la costruzione dell'esagono regolare mediante la divisione in sei parti di una circonferenza, secondo quanto già detto.

Tracciato l'esagono regolare, si costruisce l'esagramma prolungando a due a due, i lati non consecutivi con un solo lato interposto, ad esempio prolungando i lati *EV* e *DS* che hanno interposto il lato *DE* si forma il triangolo *ADE*. Prolungando i lati non consecutivi *EV* e *UX* si ottiene il triangolo *BUV*, e così di seguito. Se i lati interposti sono due, i prolungamenti sono paralleli e non si ha intersezione *EV* // *SX*; *UV* // *DS*; *UX* // *DE*.

La distanza tra due vertici non consecutivi dell'esagramma è il triplo del lato dell'esagono *QR* = 3 *DE*; *AC* = 3 *DS*; BC = 3 *UX*. La superficie dell'esagramma è il doppio della superficie dell'esagono [Fig. 21].

31 Pacioli (1509, 10v-9r).

32 d'Etaples (1503, 71v-72r; 78v-79r).

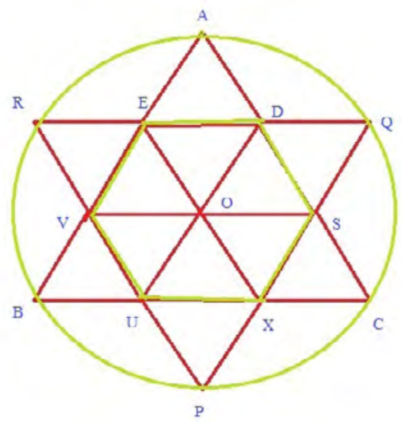


Fig. 21 Costruzione dell'esagramma a partire dall'esagono regolare.

Bouelles 'dimostra' questa proposizione per così dire 'a vista', divide l'esagono regolare in sei triangoli equilateri uguali, questi a loro volta sono uguali ai sei triangoli che formano i vertici dell'esagramma. L'esagono quindi è scomposto in sei triangoli uguali, l'esagramma in 12 triangoli uguali. Unendo i vertici dell'esagramma si ottiene un altro esagono regolare. La superficie compresa tra i due esagoni risulta divisa in sei triangoli equilateri e in sei triangoli isosceli.

L'angolo interno di un vertice dell'esagramma è 2/3 di un angolo retto, essendo l'angolo di un triangolo equilatero. La somma degli angoli dei sei vertici dell'esagramma è pari a quattro angoli retti.

Bouelles avrebbe potuto aggiungere altre proprietà, ad esempio il rapporto tra l'altezza e il lato del triangolo equilatero: il quadrato dell'altezza è i 3/4 del quadrato del lato. Un altro pittore, Piero della Francesca, la rendeva in questo modo: «D'omni triangolo equilatero la potentia d'un de' suoi lati a la potentia del catecto è sexquitertia», ovvero il quadrato del lato di un triangolo equilatero è 4/3 del quadrato dell'altezza[33]. Applicata a uno dei dodici triangoli equilateri uguali che compongono l'esagramma, la relazione fornisce l'apotema dell'esagono regolare al centro, ovvero il raggio della circonferenza inscritta nell'esagramma. Esprimendo tale altezza in funzione del quadrato del raggio della circonferenza circoscritta, si ha che il quadrato dell'altezza è uguale a 1/4 del quadrato del raggio della circonferenza circoscritta: $h2 = 1/4\ R2$ come dire che il raggio della circonferenza inscritta nell'esagramma è la metà del raggio della circonfe-

33 Piero della Francesca (2012, prop. 406).

renza circoscritta. Si può anche ricordare che la distanza tra i lati paralleli dei due triangoli equilateri che formano l'esagramma è uguale al raggio della circonferenza circoscritta, ovvero è uguale alla apertura di compasso che divide la circonferenza in sei parti uguali.

Passando di proprietà in proprietà, di rapporto in rapporto, di figura in figura, Euclide-Bramante poteva anche arrivare alla proposizione 12 del libro XIII degli *Elementi* che compare nel *Doppio ritratto*. La proposizione dimostra la relazione tra il lato $l3$ del triangolo equilatero ABC e il raggio $R3$ della circonferenza circoscritta ovvero $l3 = R3\sqrt{3}$. All'epoca di Raffaello la relazione era espressa in forma narrativa, perché mancava l'attuale notazione matematica, ovvero: il quadrato del lato di un triangolo equilatero è uguale a tre volte il quadrato del raggio della circonferenza circoscritta ai due triangoli grandi. Volendo citare le parole di un anonimo maestro d'abaco fiorentino del Quattrocento, diventa: «Aj per regola. Quello spatio [l'apertura del compasso, ovvero il raggio della circonferenza circoscritta] aj a multiplicare in se stesso, e 'l prodotto multiprica per 3, e di quello che ffa pigla la radice, e così arai la faccia [cioè il lato] di quello triangolo»[34]. Si può immaginare che Euclide-Bramante abbia confermato queste uguaglianze confrontandole col compasso.

L'esagramma si dimostra una intrigante figura geometrica, adatta a implicare numerose costruzioni e teoremi: la lezione di Euclide-Bramante diventa una circostanza memorabile, in tutto degna di far parte del consesso filosofico ateniese, di comparire a pieno titolo nell'affresco.

Come e da chi Raffaello abbia ricevuto le informazioni sui poligoni stellati, rimane oscuro, doveva comunque essere una fonte autorevole se un poligono stellato è andato a finire nella lavagnetta euclidea. Molto probabile che le fonti fossero diverse, infatti le vicende del nostro esagramma non finiscono qui, la sua storia è molto più tortuosa.

La scelta dell'esagramma, cioè di un oggetto matematico non reperibile nelle opere dei sommi geometri greci dell'Antichità, indica l'intenzione di ampliare l'orizzonte delle matematiche prendendo oggetti di altre tradizioni.

5. Esagrammi di pietra

Nelle discussioni che hanno portato alla elaborazione dell'inedito rettangolo con diagonale non sappiamo se Raffaello abbia avuto parte e che parte abbia

34 Anonimo fiorentino (1993, 79).

avuto, né la poteva avere dato l'alto livello matematico richiesto, come mostreremo. Altra questione era l'esagramma: se considerarlo un abbellimento, come una cornice del rettangolo centrale, oppure se attribuirgli un significato che lo mettesse in relazione col rettangolo. Ma innanzitutto cosa poteva sapere Raffaello in materia di esagrammi? Diventa interessante cercare se, dove e quando ha avuto l'occasione di vedere tali figure. Parliamo di vedere perché a un pittore è congeniale tenere a memoria l'immagine di un oggetto, 'fotografarlo', ragionare sulle immagini piuttosto che studiare sui libri.

Occasioni di avere davanti agli occhi esagrammi o figure ad essi riconducibili Raffaello ne ha avute diverse. Procedendo in ordine di tempo, il primo, o uno dei primi esagrammi visti da Raffaello è a Firenze, nella chiesa di san Pancrazio, in una delle 30 tarsie marmoree che decorano l'esterno del Sacello del Santo Sepolcro, realizzato tra il 1457 e il 1467 da Leon Battista Alberti per Giovanni di Paolo Rucellai. Le tarsie, tutte di forma circolare, sono attribuite allo scultore Giovanni di Bertino, presentano motivi geometrico-naturalisti di grande eleganza.

Quello che impressiona è l'insieme dell'opera, ben ventisette tarsie sono impostate su schemi geometrici, formano una sorta di album in cui si 'dimostra' come partendo da poligoni-base – triangolo, quadrato –, raddoppiando il numero dei vertici, si arriva a costruire poligoni di 6, 8, 10, 12, 16 vertici [Fig. 22]. In certi casi si tratta di figure stilizzate, in altri casi è riconoscibile lo schema geometrico. L'esagramma, o esagono stellato, ha il vantaggio della facilità di costruzione con il compasso ad apertura fissa, inoltre l'esagono regolare gode della proprietà di ricoprire una superficie piana senza lasciare spazi vuoti o sovrapposizioni, proprietà che condivide soltanto col triangolo equilatero e col quadrato.

Per quanto compete all'esagramma in alcune tarsie inizia a distinguersi dagli elementi decorativi, arrivando fino a una tarsia dove appare come tale, ossia come simbolo sacro. Il disegno della stella a sei vertici, ovvero dei due triangoli equilateri che s'intersecano, è reso in modo essenziale, chiaro, immediatamente comprensibile [Fig. 23]. Un esagramma simile a quello del Sacello, di epoca anteriore, è conservato nel Museo dell'Opera del Duomo di Firenze. Le tarsie marmoree sono una caratteristica del romanico fiorentino, la facciata della Badia Fiesolana, sec. XII è uno dei numerosi esempi [Fig. 24].

Fig. 22 Firenze, Sacello del Santo Sepolcro (1467),
Formella [CC BY-SA 3.0, I. Sailko].

Dopo gli anni del soggiorno a Firenze, nel 1509 inizia per Raffaello il periodo definitivo di vita, nella Roma dei papi Giulio II e Leone X. A Roma Raffaello trova ancora gli esagrammi, in numero ben maggiore rispetto a Firenze, quasi in modo 'ossessivo', si ammirano negli stupendi pavimenti cosmateschi delle basiliche romane. Il termine 'cosmati' venne introdotto nell'Ottocento prendendo spunto dal nome di due eccellenti "magistri marmorari" romani: Cosma di Jacopo di Lorenzo, attestato a partire dal 1210 e Cosma di Pietro Mellini citato in alcuni documenti dal 1264 al 1279.

Fig. 23 Firenze, Museo dell'Opera del Duomo,
Formella [CC BY-SA 3.0, I. Sailko].

I 'cosmati' sono gli artisti che lavorano nelle botteghe marmorarie presenti a Roma dal XII al XIV secolo, a questo periodo risale gran parte dei pavimenti a mosaico e di altre opere musive nelle basiliche di Roma[35].

Fig. 24 Badia Fiesolana, Riquadro a tarsie marmoree della facciata, sec. XII, in La Biblioteca della Toscana "Pietro Leopoldo", a cura di Consiglio regionale della Toscana, https://www.consiglio.regione.toscana.it/upload/BIBLIOTECA/documenti/DOCUMENTI_BIBLIOTECA/libretto_biblio_maggio23_web_cpl.pdf, consultato il 21/12/2024

Si parla di 'stile cosmatesco' per caratterizzare una decorazione musiva a carattere astratto, eseguita secondo modelli geometrici; impressionante è l'effetto visivo ottenuto con l'impiego di pietre dure, di marmi, di pasta vitrea, di dorature, e con decisi accostamenti coloristici [Fig. 25].

Nelle decorazioni delle superfici piane ricorre spesso il disegno-base esagonale, particolarmente adatto a ricoprire le superfici senza lascare interstizi. Gli angoli interni di un esagono regolare misurano 120°, di conseguenza accostando tre esagoni si ottiene un angolo di 360°; diversamente per i pentagoni regolari con angolo interno di 108°, per cui tre pentagoni accostati coprono 324° anziché 360°.

È evidente come un riferimento esagonale sia particolarmente adatto a ospitare esagrammi. Troviamo infatti esagrammi nei pavimenti cosmateschi della basilica di San Lorenzo fuori le mura, della basilica di Santa Maria in Cosmedin, della basilica di Santa Maria Maggiore, e nelle pareti di un'opera a dire poco straordinaria come il chiostro annesso alla Basilica di San Giovanni in Laterano, per citare alcuni dei numerosi esempi [Fig. 26].

35 Del Bufalo (2010, 139ss).

Fig. 25 Santa Maria in Trastevere Roma, tratta da «Kabbala e geometria: il cerchio con il punto», 28 febbraio 2015 da Elisabetta Meacci, in *Archeosofia a Pistoia*, https://archeosofiapistoia.wordpress.com/2015/02/28/kabbala-e-geometria-il-cerchio-con-il-punto/.

Fig. 26 Chiostro Basilica san Giovanni in Laterano, Roma (CC BY-SA 4.0).

Fig. 27 Cattedra episcopale. Duomo di Anagni. Sec. XIV, ph. Graframan.com (https://www.cattedraledianagni.it/cattedrale).

L’eccezionale esagramma è opera del maestro cosmatesco Vassalletto da Roma. Non è da escludere che Raffaello l’abbia visto [Fig. 27]. Una ulteriore fonte iconografica, poteva essere il ritrovamento di antichi reperti musivi che suscitavano tutto l’interesse di Raffaello [Fig. 28].

Fig. 28 Domus Ostaglia, Brescia, ph. Stefano Bolognini.

È appena il caso di ribadire che la geometria dei «magistri marmorari», come del resto quella dei «maestri di perspectiva», è una geometria determinata da esigenze lavorative, fatta di regole, di espedienti, di procedimenti standard, insomma da quell'armamentario tecnico-pratico indispensabile per ottenere in modo preciso e rapido i bellissimi disegni formati da migliaia dii tessere che si ammirano in molte chiese romane. Il titolo di maestro era il riconoscimento di una eccellenza tecnica capace di diventare arte.

I dati fin qui esposti permettono qualche ipotesi su come e perché la figura di un esagramma si trovi nella lavagnetta euclidea. Come prima possibilità non è da escludere che l'idea di assumere l'esagramma come rappresentante delle figure geometriche l'abbia avuta Raffaello per semplice imitazione di una figura vista più volte che lo aveva colpito. Oppure che l'idea sia scaturita nel corso di scambi più o meno vivaci di idee, con alcuni tecnici "marmorari" su come venivano tracciati gli esagrammi e gli altri poligoni, stellati o non stellati, È possibile ché a questi 'dialoghi tecnici' abbia partecipato qualche persona di buona competenza geometrica, dato che l'idea del rettangolo con diagonale incluso nell'esagramma la presuppone necessariamente. La scena affrescata sarebbe come l'eco di un simile antefatto: la lavagnetta euclidea che giace sul pavimento, Euclide nelle sembianze di Donato Bramante, cioè di un architetto, potrebbero indicare che si sta parlando di geometria e di esagrammi in relazione a come decorare il pavimento di un importante edificio, Bramante-Euclide sta spiegando quali siano le combinazioni di figure geometricamente compatibili.

In mancanza di una qualsiasi relazione sui fatti, è sempre possibile che quanto ipotizzato sia effettivamente accaduto, che il protagonista del 'dialogo tecnico' sia Bramante in persona, che Raffaello abbia voluto raffigurare il compatriota che lo aveva tanto aiutato. Questo sarebbe il retroscena. Ma c'è di più perché Raffaello ha voluto fissare l'istante, cogliere con sensibilità unica lo spirito di una situazione che aveva personalmente vissuto: ci teneva a raffigurare un vero maestro che impartisce a veri discepoli vera matematica. Un programma estremamente rischioso perché una circostanza simile nessuno l'aveva mai vista né tentata. Bramante compasso alla mano spiega con sicurezza quello che vuol fare, non altrettanto vale per gli allievi Come accade in questi casi gli allievi hanno reazioni diverse che Raffaello sa cogliere con grande sensibilità. Proprio per questo a mio giudizio il gruppo dei geometri euclidei è il più riuscito dei gruppi nella *Scuola di Atene*. L'allievo in alto a sinistra è quello che ha capito tutto, con l'indice della mano sinistra scandisce i passaggi della argomentazione. La mano destra è appoggiata sulla spalla di un allievo in palese difficoltà che ripete anche il gesto della mano dell'amico che lo sta aiutando. L'allievo in piedi al centro è 'fotografato' nell'istante in cui "si accende la lampadina" tutto all'improvviso si illumina e si collega. Il quarto allievo chiede a gran voce lumi perché non sta capendo niente. Non è un caso se il gruppo dei geometri nella *Scuola di Atene* insieme al *Doppio ritratto* siano le immagini di matematica e di matematici di gran lunga più riprodotte.

6. Sapienze antiche

Nella seconda metà del Quattrocento la vicenda degli esagrammi prende una nuova fisionomia all'interno di quella corrente filosofica definita come Neoplatonismo cristiano. Si tratta di una filosofia aperta a forme di 'sincretismo' tra sapienza cristiana, misticismo ebraico e saggezza pagana; una tendenza che caratterizza il dibattito filosofico e teologico dal secondo Quattrocento ai primi del Cinquecento. Firenze, la città di Marsilio Ficino, il filosofo più rappresentativo di quegli anni, è il centro del neoplatonismo cristiano, la sede della Accademia platonica, un cenacolo di letterati e di filosofi dove si sostenevano e si dibattevano dottrine come l'unità della verità e l'immortalità dell'anima, entrambe oggetto di forti critiche da parte dei teologi scolastici e dei filosofi aristotelici. L'unità della verità era una posizione filosofica 'forte' dei neoplatonici, di Ficino, e in modo ancora più radicale di Giovanni Pico della Mirandola. Osserva Paul Kristeller: «Che la verità sia universale e che i pensatori di tutte le tradizioni filosofiche e religiose esprimano una parte di essa, è per Pico un concetto fondamentale». Tuttavia Pico «non mette in evidenza l'inadeguatezza che separa tutti i pensieri umani dalla verità assoluta, ma piuttosto la parte positiva che essi derivano da quella verità». Da grande umanista quale era, Pico volle conoscere le fonti autentiche, pertanto «imparò l'ebraico, l'aramaico e l'arabo, si fece spiegare e tradurre le opere di molti scrittori arabi e ebrei sconosciuti agli studiosi occidentali. Questo vale per Averroè e altri pensatori arabi, per i commentatori ebraici del Vecchio Testamento e per i Cabalisti ebraici»[36].

Sulla scia di Marsilio Ficino e di Pico della Mirandola, le cerchie umanistiche sono animate dalla convinzione che quei tesi ebraici, aramaici, siriaci, arabi, ricercati con tanto zelo e dedizione, risalgono a personaggi antichissimi, dotati di straordinaria saggezza e di profetica intuizione del divino. Portano i nomi di Ermete Trismegisto, Zoroastro, Orfeo, Pitagora. I loro scritti sono letti, interpretati e tradotti, nella convinzione che contengano profonde verità cristiane. Questo valeva

36 Kristeller (1978, 70-71 e 73).

in modo particolare per i testi cabalistici propri della tradizione mistica ebraica, perché avevano come riferimento il testo biblico, lo stesso testo dei cristiani.

Cristianesimo ed ebraismo sono un caso unico nella storia delle religioni, il cristianesimo non si ispira all'ebraismo; si pone piuttosto come compimento dell'ebraismo. La cabala è un sistema per svelare significati racchiusi nelle espressioni, nelle parole e perfino nelle singole lettere della Sacra scrittura. Nella prospettiva cabalistica il simbolo possiede una propria esistenza, ha un suo autonomo significato, viene a far parte di altri rimandi. Non segue le consuete formulazioni, esige un cammino spirituale che parte dai segni visibili, perfino dalla forma geometrica di una lettera dell'alfabeto ebraico, per avvicinarsi all'invisibile. Se YHWH, il nome di Dio, è una parola che la mistica ebraica vieta di pronunciare, quindi un insieme di lettere che non rimanda ad alcun insieme di suoni, è la stessa forma grafica delle lettere a possedere una valenza, una carica simbolica attingibile attraverso una ascesi, ovvero una discesa nelle 'interiora' del testo. Si apre così un nuovo spazio del testo sacro da 'esplorare'.

Al tempo dell'affresco – Ficino muore nel 1499, Pico nel 1494 – il più autorevole esponente del neoplatonismo cristiano è Egidio da Viterbo (1469-1532). Cardinale, padre generale dell'Ordine agostiniano dal 1506 al 1518 – come tale incontra Lutero –, dottissimo conoscitore del latino, del greco, in più dell'aramaico, dell'arabo, dell'ebraico. Appassionato ricercatore di antichi testi, amico di Marsilio Ficino che considera il «nuovo Socrate», interlocutore di Pico della Mirandola, di cui condivide l'interesse per la cabala, Egidio è una figura di grande spicco nel panorama culturale ed ecclesiale romano. Per avere un'idea del 'peso' del suo ruolo nella Chiesa va citato il discorso *De Ecclesiae incremento* pronunciato nella basilica di San Pietro il 21 dicembre 1507 – pochi mesi prima dell'arrivo di Raffaello a Roma – alla presenza di papa Giulio II, in occasione dei festeggiamenti per le vittorie e le scoperte geografiche del re del Portogallo Manuel I. Per salutare la nuova età dell'oro che vede la Chiesa restituita alla purezza e povertà originaria, «Egidio non esita minimamente a citare insieme e a vario titolo, mescolati ai personaggi delle Scritture, il re Minosse, il Trismegisto, la Sibilla, Pitagora, Esiodo, Platone, Aristotele, Virgilio, le Sirene, l'Idra di Gerione, Cerbero con il Tartaro, e Giano contemporaneo di Mosè; ricorda ai suoi ascoltatori i miti di Proteo e di Circe, fa loro intravvedere le dottrine dei bramini, svela gli antichi misteri degli Etruschi»[37]. Notevole parte del discorso è riservata a considerazioni numerologico-cabalistiche come le ricorrenze e i valori del numero 12, e anche le corrispondenze tra entità di ordine quattro. Diversamente da come si può

37 De Lubac (1977, 100-101).

pensare, a Egidio non fa problema conciliare questa sarabanda di personaggi e di 'filosofie'; è sicuro che letti correttamente si rivelerebbero in accordo con le verità della fede cristiana. Ma il metodo più adeguato per portare alla luce questo non è la dialettica dei teologi scolastici, bensì la cabala, la «divina dialectica» in grado di illuminare i passi più oscuri e controversi delle Sacre scritture.

Argomenta Egidio parlando di se stesso: "Se come dice Giovanni tutto andava scritto, poiché il mondo divino è pieno d'innumerabile bellezza, per nessuna cosa sarebbero bastati libri. Trovai così un modo per scrivere meno libri e di significare innumerevoli cose con segni e lettere trasformati". «Nam teste Johanne si scribenda erant omnia, cum divinus mundus innumerabilem pulcritudinem contineat, nulla rei volumina suffecissent. Inveni itaque viam scribendi haud numerosa volumina, et signis litterisque commutatis innumerabilia significandi»[38].

Egidio è convinto che i testi sacri siano scritti con una speciale 'stenografia', analogamente alle iscrizioni scolpite negli archi o nelle statue dove ad esempio M.T.C. significa Marco Tullio Cicerone, lui stesso adotta questo sistema di scrittura. «Ita ego sapientibus meis per litterarum litterarumque numeros, per puncta, lineas, coronas, divinarum seriem rerum ut notis, nutibusque quos soli animadverterent sapientes»[39].

I caratteri di questa stenografia delle cose divine sono lettere, numeri-lettera, punti, linee e cerchi, 'moltiplicatori' di significati, comprensibili solo ai sapienti. Viene da aggiungere: comprensibili eventualmente anche ai pittori, per ragioni diverse.

Di queste nuove e discusse concezioni, che idea si era fatto Raffaello? Più concretamente quanto e cosa poteva capire di argomenti del genere? Che ne sapeva della cabala e degli esagrammi? Una risposta immediata è che Raffaello per certe soluzioni figurative, sia di portata generale, sia di dettaglio come la figura sulla lavagnetta euclidea, abbia fatto in qualche modo riferimento a persone e a filosofie che, per ragioni più o meno fondate, sentiva congeniali. L'ipotesi porta in primo piano gli anni del soggiorno di Raffaello a Firenze, nel cuore del neoplatonismo cristiano. Quel neoplatonismo che, come si è detto, è la 'portante' della *Scuola di Atene*: la presenza in primo piano dei matematici con le loro lavagnette è una prima evidenza di tale impostazione. In modo coerente lo sono anche le figure tracciate sulle lavagnette. Nella lavagnetta pitagorica lo schema delle consonanze musicali e la figurazione del numero 10 rappresentano idee riprese e sviluppate in ambito platonico come indica la copia del *Timeo* tenuta in mano da Platone. Inoltre la versione geometrica del numero 10 nella lavagnetta pitagorica, la cosiddetta 'tetratkis', ha anche un significato cabalistico, le quattro

38 Secret (1958, 138).

39 Ivi, 138 e 136.

consonanti del nome di Dio – il tetragramma –, possono essere messe sui lati di un triangolo equilatero analogamente alla disposizione della tetratkis. La stessa 'sovrapposizione' di figure geometriche e di simboli cabalistici si ripropone nella lavagnetta euclidea dove un esagono stellato 'convive' con la figura dell'esagramma, ovvero con il Sigillo di Salomone. Se c'è stata attenzione da parte di Raffaello alle dottrine dei cabalisti, sicuramente è stata ai simboli e alle narrazioni, certamente non ai problemi dottrinali ed esegetici sopra accennati.

Abbiamo la conferma dell'esistenza delle condizioni più favorevoli perché avvenisse l'incontro tra Raffaello ed Egidio da Viterbo, e perché l'incontro potesse avere gli esiti migliori: nell'influente cardinale Raffaello trova le stesse posizioni dei filosofi fiorentini, all'inverso Egidio scopre in Raffaello un artista che condivideva le sue idee, disposto a tradurle in immagini. Emerge anche il nome di Tommaso Inghirami detto Fedra (1470-1516) dottissimo latinista, *Praepositum* della Biblioteca Vaticana, nonché 'prefetto' delle rappresentazioni teatrali e delle cerimonie. La 'candidatura' dell'Ingnirami a consulente di Raffaello nel programma iconografico della Stanza della Segnatura, è rafforzata dallo stretto rapporto col pittore urbinate che lo ritrae in modo magistrale.

Sono segnali, indizi, candidati a diventare documenti probatori; occorrerebbe ricostruire la presenza, l'entità, i contenuti di questo dibattito nell'ambiente romano, chi erano i filosofi, le persone colte sensibili a queste tematiche care a Raffaello. Vale l'affermazione che gli anni in cui l'affresco viene eseguito cadono in quel breve periodo tra Quattro e Cinquecento che François Secret ha definito «L'età aurea della Qabbalah cristiana in Italia»[40]. Sono le dottrine cabalistiche a possedere i requisiti adatti a suggerire il disegno di un esagramma nella lavagnetta euclidea.

Prove documentarie dirette di una simile scelta non esistono, o meglio non le conosciamo; tuttavia ci sono ragioni sufficienti per sostenere la provenienza umanistico-cabalistica dell'esagramma.

7. L'enigmatico rettangolo

Le considerazioni fin qui svolte hanno avuto come oggetto la figura dell'esagono stellato, o se si vuole dei due triangoli equilateri che s'intersecano, mentre è rimasta nell'ombra un'altra figura, al centro dell'esagramma, la cui presenza è un vero colpo di scena. Non sorprende per la forma un rettangolo con una diagonale non è niente di speciale. Sorprende piuttosto per il suo essere lì in posizione

40 Secret (2001, 89 e sgg).

centrale, per cosa stia lì a significare. Il rettangolo diagonalizzato è una presenza ardua da comprendere e apre una serie di interrogativi ai quali sembra difficile dare risposte se non certe, almeno fondate e ragionevoli. Abbiamo tre diciamo reperti – esagramma, rettangolo con diagonale, esagono regolare – da mettere insieme, per dire cosa? per fare cosa? Il primo impatto è un colpo d'occhio che cerca analogie, che sorprende accostamenti, abbiamo una figura ibrida creata mettendo insieme 'pezzi' di vario tipo, operazione che richiede l'esecuzione di misure. Secondo l'uso del tempo veniva fissata una lunghezza-campione a cui fare riferimento. La sigla. *M*▬ indica che il disegno delle figure viene eseguito in riferimento a una unità di misura prefissata, una sorta di modulo come quello largamente usato dagli architetti. La sigla *M*▬ sarebbe l'iniziale di 'modus' o di 'mensura'. Possiamo intendere *M*▬ come l'apertura del compasso, più precisamente come la lunghezza del segmento apprezzato dalle punte del compasso che diventa lunghezza di riferimento per l'intera costruzione geometrica. Troviamo la sigla M_ ben leggibile in alto nella lavagnetta [Fig. 29].

Fig. 29. Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene,* particolare della lavagnetta euclidea (Public Domain).

Nel caso presente in via ipotetica adottiamo un modulo *M*▬ uguale al raggio *ZO* della circonferenza inscritta nell'esagono posto al centro dell'esagramma, Il raggio *AO* della circonferenza circoscritta vale due moduli cioè *AO* = 2 *M*▬, il diametro *AP* vale 4 M▬, l'altezza *AV* del triangolo *ABC* vale 3 *M*▬.

La scelta del modulo è soggettiva dipende dalle caratteristiche del disegno, presenta il vantaggio di facilitare i calcoli numerici scomodi e soggetti ad errori; evitano anche la conoscenza dei teoremi geometrici ridotti a regole di impiego del compasso. Procedendo sempre per via empirica, col compasso Bramante verifica che scelto come modulo *DE* = *M*▬ si verifica col compasso che *QR* = 3 M▬; *PR* = 3 M▬; *PQ* = 3 M▬. ossia che il triangolo *PQR* è un triangolo equilatero come il triangolo *ABC* = M▬. Così di seguito, la lezione è una rassegna dei casi che occorrono.

Stabilite queste relazioni è il momento di introdurre il rettangolo *EDFK* In posizione centrale. La prima evidenza è che la misura dei lati del rettangolo dipende dalla misura dell'esagramma, ovvero il lato maggiore del rettangolo inscritto è uguale al raggio della circonferenza in cui l'esagramma è inscritto, che a sua volta è uguale alla distanza tra i lati paralleli *CB* e *QR* dei due triangoli equilateri che compongono l'esagramma, per cui *EF* = *DK* = 2M [Fig. 30].

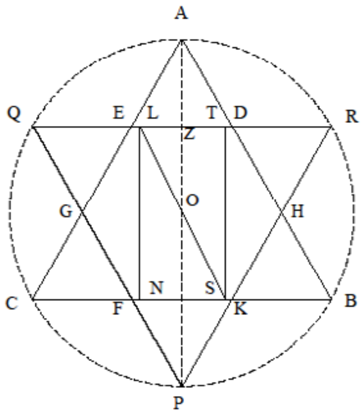


Fig. 30. Il rettangolo inscritto nell'esagramma.

Abbiamo a che fare con un rettangolo, incluso nell'esagono al centro dell'esagramma, con il lato maggiore pari al raggio della circonferenza circoscritta all'esagramma, col lato minore lungo metà del lato maggiore, e con una diagonale. Passando in rassegna la geometria nota ai primi del Cinquecento, due sono i casi in cui il procedimento risolutivo impone di tracciare rettangoli con le seguenti caratteristiche:

- divisione di una linea in due parti in proporzione continua tra loro, operazione nota come determinare la sezione aurea di un segmento,
- duplicazione del cubo, trovare lo spigolo di un cubo avente volume doppio del cubo prefissato.

8. Costruire sezioni auree

Al tempo di Raffaello quella che Pacioli chiamava «Divina proportione» era nota come divisione di un segmento «in media ed estrema ragione», merito del Pacioli è di aver dato un nome affascinante a qualcosa che non aveva nome. La dicitura oggi in uso di 'sezione aurea' risale all'Ottocento e recita: sezione aurea di un segmento è la parte media proporzionale tra il segmento e la parte rimanente. La costruzione grafica della sezione si trova nel secondo libro degli *Elementi* di Euclide è nettamente diversa da quella attribuita ad Erone Alessandrino, uno dei grandi ingegneri del Mondo antico. È questa la versione preferita dai tecnici di tutte le epoche. Lo chiarisce bene Niccolò Tartaglia: la costruzione grafica euclidea è impeccabile, va bene per dimostrare il teorema, ma è macchinosa, inutilizzabile ai fini pratici, dove conta la semplicità e non serve la «speculativa dimostratione». Queste le parole del matematico bresciano:

«Li tanti lineamenti fatti nella superior figura [euclidea], si fanno per far la speculativa dimostratione di tal conclusione. Della quale [dimostrazione] il puro pratico, cioè quello che non ha inteso i principii di Euclide, non si tien conto di tai dimostrationi per non esser atto a comprender quelle». (f. 9v)

Il metodo grafico, semplice, senza «li tanti lineamenti», usato dai tecnici per dividere un segmento in «media ed estrema ragione» procede così: *AB* è il segmento da dividere in sezione aurea, il che vuol dire che sul segmento *AB* si fissa un punto C tale che $AB : AC = AC : BC$. [Fig.] Si tratta di costruire un segmento che soddisfa la proporzione.

Nell'estremo *B* di *AB* si manda la perpendicolare *BO* ad *AB*. Sia *BO* la metà di *AB*,

Con centro *O* si traccia la circonferenza di raggio *BO* si unisce *O* con *A*. La diagonale *AO* interseca la circonferenza nel punto *P*. Il segmento *AP* è la sezione aurea cercata, Col compasso centrato in *A* con apertura in *P* si trasferisce *P* su *AB* nel punto *C*. Ed è fatta [Fig. 31].

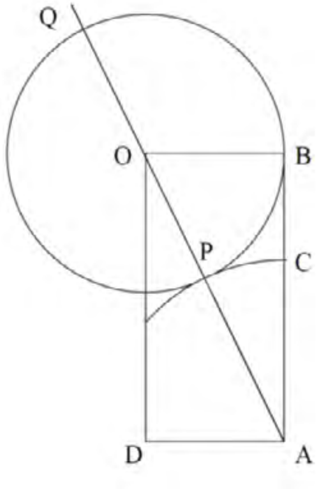


Fig. 31. Dimostrazione geometrica della sezione aurea.

Chi voleva oltrepassare le colonne d'Ercole della matematica pratica per affrontare il mare magnum della geometria di Euclide incontrava un primo ostacolo nella lingua il latino. Teoremi, definizioni, assiomi, tutto nella lingua di Cicerone. Un secondo ostacolo da superare era il carattere deduttivo della geometria euclidea. La sequenza di operazioni grafiche viste sopra non ha niente di deduttivo. Ma se qualche "peritissimo" tecnico come Tartaglia la voleva certificare, doveva partire da dati certi, procedere deduttivamente passo dopo passo arrivando finalmente alla proporzione cercata.

Dato il segmento AB trovare la parte aurea cioè un punto C tale che

$AB : AC = AC : BC$.

Teorema della tangente e della secante. La tangente è la linea AB, la secante è la linea AQ. Entrambe tracciate dal punto A. Vale la proporzione

$AQ : AB = AB : AP$

Se vale questa Euclide ci assicura che valgono anche le differenze

(AQ - AB) : AB = (AB - AP) : AP

Vale anche

(AQ - PQ) : AB = (AB - AC) : AC

Fatte le differenze abbiamo

AC : AB = BC : AC

Invertendo

AB : AC = AC : BC

La conferma che il metodo tecnico di dividere un segmento in proporzione aurea dà un risultato corretto è ottenuta mostrando che è conseguenza deduttiva del teorema euclideo della tangente e della secante

9. Duplicare il cubo

Un altro rettangolo col lato minore metà di quello maggiore e con la diagonale compare nella soluzione grafica di uno dei tre problemi classici della matematica antica il cosiddetto problema di Delo. Gli altri due problemi classici sono la quadratura del cerchio – trovare un quadrato avente la stessa superficie di un cerchio dato –; la trisezione dell'angolo – dividere un angolo dato in tre angoli uguali –. Il problema in questione non avrebbe un'origine matematica, secondo la testimonianza di Eratostene (276 a C. – 194 a C.) – matematico, astronomo, geografo, corrispondente di Archimede – l'oracolo del dio Apollo, interrogato dagli abitanti di Delo su come liberarli da una pestilenza, aveva imposto la dedica di un altare cubico di volume doppio rispetto a quello già esistente. A parte gli oracoli, caratteristica di questi tre problemi è di non essere risolvibili tramite operazioni con riga e compasso mentre, come si è appena visto, la sezione aurea di un segmento è costruibile con riga e compasso.

In generale le figure piane a lati rettilinei sono duplicabili mediante operazioni con riga e compasso; ad esempio per trovare un quadrato di superficie doppia rispetto a un quadrato dato, basta costruire un quadrato sulla diagonale di quest'ultimo. Il passaggio dalle figure piane a quelle solide, dal quadrato al cubo, complica le cose in quanto richiede la costruzione di curve diverse dagli archi di circonferenza come le parabole. Nel procedimento risolutivo del problema di Delo compaiono segmenti e archi di circonferenza, tuttavia per arrivare a buon fine è necessario ricorrere a operazioni non eseguibili con riga e compasso.

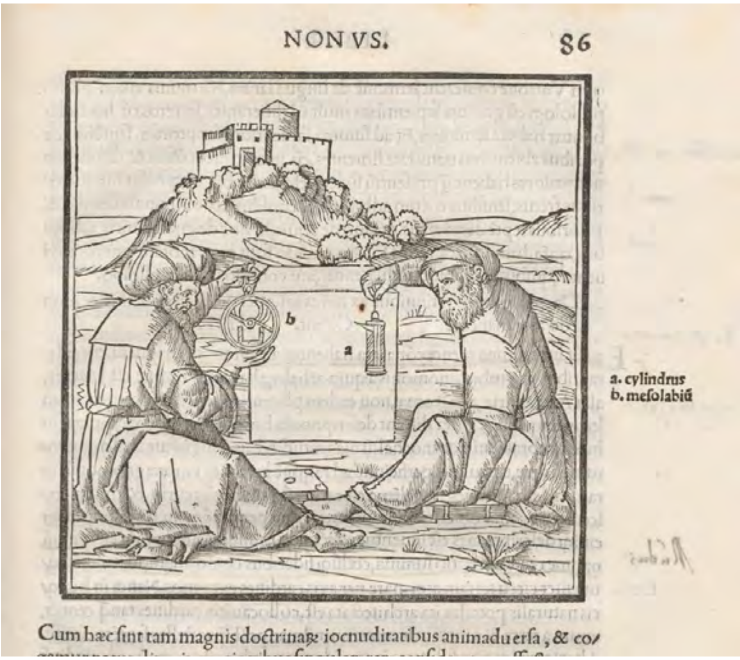


Fig. 32. Vitruvio (1511, 86r).

All'epoca dell'affresco il problema di Delo era noto con molti dettagli, grazie all'opera di ricerca e di traduzione dei testi matematici antichi intrapresa dall'eruditissimo Giorgio Valla (1447-1500) autore di un monumentale *De expetendis et fugiendis rebus opus*, ovvero 'libro' sulle cose da ricercare e su quelle da rifuggire [Fig. 32]. L' *Opus* occupa 1300 pagine di grande formato, rilegate spesso in due volumi, è concepito come una enciclopedia di tutto lo scibile. La matematica occupa una parte considerevole del primo volume, Valla dedica speciale attenzione ai matematici dell'antichità greco-romana – nell'*Opus* non viene citato nessun autore arabo e medievale –, da rigoroso umanista cerca i loro manoscritti che traduce e riporta in ampi stralci nell'*Opus*. Tra gli altri Valla possedeva un codice delle opere di Archimede del IX secolo, andato poi disperso. Il testo del Valla, senza dubbio sottovalutato dalla storiografia della scienza, introdusse nel dibattito matematico argomenti come le sezioni coniche fino ad allora sconosciute; per tutta la prima metà del Cinquecento fu una fonte e un punto di riferimento di prim'ordine.

Al problema di Delo sono riservate numerose pagine che comprendono tutto o quasi il dibattito antico sull'argomento, questi gli autori citati: Erone, Filone di Bisanzio, Diocle, Apollonio, Archita di Taranto, Menecmo, Eratostene, Pappo. Una vasta rassegna che rende l'idea delle molteplici fonti su cui Giorgio Valla lavorava. Di ogni autore riporta il metodo di risoluzione, completo di dimostrazione e di costruzione grafica[41].

Finora si è parlato del problema della duplicazione del cubo; di fatto la vicenda dei tentativi di risoluzione è segnata da un importante risultato di Menecmo (IV secolo a.C.) che trasforma il problema della duplicazione del cubo nel problema dell'inserimento tra un segmento a e il segmento doppio $2a$ di due segmenti medi proporzionali in proporzione continua. Il problema di Delo diventa: dati due segmenti a e $2a$ costruire due segmenti x e y tali che $a : x = x : y = y : 2a$. (1)

Per questo è noto come problema delle due medie, sempre non risolvibile con riga e compasso.

Passando alla notazione algebrica si verifica la validità della proposta di Menecmo. La (1) viene distinta nelle due proporzioni continue $a : x = x : y$ e $x : y = y : 2a$, che per la proprietà di uguaglianza tra il prodotto dei medi e il prodotto degli estremi, si trasformano nelle equazioni di secondo grado $x2 = ay$ e $y2 = 2ax$.

Tradotte in grafico sono due parabole che s'intersecano nel punto di coordinate (0,0) l'origine degli assi, e in un altro punto P le cui coordinate (x, y) risolvono il problema di Delo [Fig. 33].

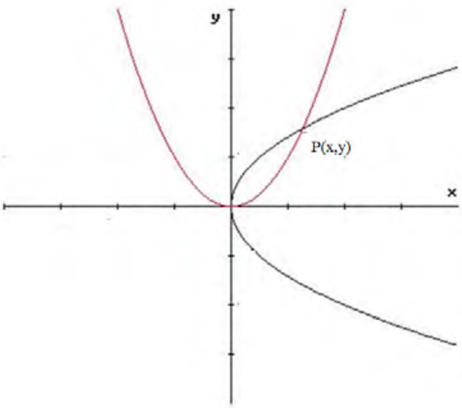


Fig. 33. Soluzione di geometria analitica del problema della duplicazione del cubo.

41 Valla (1501, libro XIII, cap. IIII, ff. non num).

Nello stesso tempo rendono esplicito il nesso tra il problema delle due medie e il problema della duplicazione del cubo. Infatti dalla prima relazione si ricava $a = x2/y$; sostituendo nella seconda si ottiene $y3 = 2x3$. Due grandezze x e y medie proporzionali tra a e $2a$ in una proporzione continua, sono tali che il cubo di una è il doppio del cubo dell'altra. Il risultato di Menecmo è giusto.

Un matematico del Rinascimento non avrebbe affrontato il problema iniziando dalle 'due medie' di Menecmo. Se voleva determinare la misura dello spigolo del famoso cubo avrebbe risolto agilmente il problema in tutt'altro modo, mediante «le reghole dell'aligibra amicabile», ovvero per via algebrica. La denominazione rispecchia esattamente lo stato in cui l'algebra si trovava all'epoca di Raffaello: un insieme di «reghole» risolutive per ogni tipo di equazione, che produceva una casistica sempre più ampia. Piero della Francesca cataloga 62 tipi di equazione dal primo al sesto grado, ciascuna con il suo specifico procedimento risolutivo, ma ci furono algebristi che andarono ben oltre le cento regole. Ad esempio le equazioni di secondo grado erano distinte in sei casi che in notazione attuale sono $ax2 = c$; $ax2 = bx$; $ax2+ bx = c$; $ax2 + c = bx$; $ax2= bx + c$. Il problema di Delo rientrava in un ben distinto tipo di equazione di terzo grado che un anonimo algebrista lucchese del Trecento così esprime:

«Quando li cubj sono egualj allo numero, si vuole partire lo numero ne' chubj e lla radicie chubbicha dj quello che nne viene vale la chosa»[42].

Appena più chiara la stessa equazione nel *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca:

«Quando li cubi sono equali al numero, se dèi partire li numeri per li cubi et radici cuba de quello che ne vene vale la cosa»[43].

Come si vede il simbolismo è assente, è un'algebra narrativa detta anche algebra retorica, tradotta in simboli l'equazione è del tipo $a\,x3 = c$, la regola risolutiva diventa $x = 3\sqrt{\ } c/a$. Passando a un esempio numerico, lo spigolo x dell'altare di volume doppio rispetto all'altare con spigolo di 4 cubiti, è dato da $1/2\ x3 = 43$ per cui $x = 3\sqrt{\ } (2 \times 64) = 3\sqrt{\ } 128$. La $3\sqrt{\ } 128$ era scritta come Rxcu. 128, non esisteva la notazione con la virgola, il valore numerico era espresso con un intero sommato a una parte frazionaria, quindi lo spigolo dell'altare di volume doppio è Rxcu. 128 = 5 1811/45455, come dire 5 cubiti più 1/25 di cubito; è un valore necessariamente approssimato, comunque nonostante le differenze di cui sopra il risultato è corretto. Da notare che il segno di somma non esisteva, di solito era sottinteso o indicato con la lettera p, ma tutta la notazione matematica allora in

42 Arrighi (1973, 195).

43 Piero della Francesca (2012, 55 e 110).
Arrighi (1973, 195).

uso era da reinventare perché mancante – le parentesi, il segno di esponente –, e perché inadeguata; si è conservato il segno di frazione tra numeratore e denominatore, i numeri frazionari erano chiamati «numeri rotti». La notazione delle operazioni di estrazione di radice, di somma, divisione, sottrazione, moltiplicazione, uguaglianza, era ambigua e macchinosa. In queste condizioni estrarre una radice cubica, operazione già complicata di per sé, diventava molto difficile.

Un matematico greco si trovava in condizioni ancora più difficili, mancava una notazione specifica per i numeri, indicati con le lettere, il sistema posizionale a base 10 era sconosciuto. La soluzione di Menecmo del problema delle due medie, non rendeva più facile la soluzione, aveva però il vantaggio di trasferire il problema nel campo geometrico dove i matematici greci avevano risorse molto più potenti, tanto da consentire i più disparati sistemi di soluzione del problema di Delo pubblicati dal Valla. Su questo punto i matematici rinascimentali concordavano con i loro 'colleghi' antichi. Dice, infatti, Luca Pacioli: «Per via de linee e di geometria sempre le radici di qualunque quantità a ponto si daranno». Le soluzioni fornite dal metodo grafico sono segmenti: dato il segmento che rappresenta lo spigolo del cubo da duplicare, la costruzione grafica fornisce con assoluta esattezza il segmento-spigolo del cubo duplicato, questo in linea teorica pensando ad una costruzione ideale eseguita in modo preciso con linee di spessore nullo.

Se abbiamo la misura in numeri dello spigolo del cubo da duplicare e si vuole trovare la misura dello spigolo del cubo duplicato, significa che si devono trovare due numeri tali che la terza potenza di uno sia il doppio della terza potenza dell'altro, detto altrimenti due cubi il cui rapporto sia 2. La soluzione non è un numero intero, e neppure un numero frazionario, «e però quelle radici che a ponto non si possano dare, se non per via de aproximamento, sono dette radici sorde, over indiscrete, over irrationali»[44], questa denominazione dice Pacioli è usata «da li pratici vulgari», ed è rimasta.

Senz'altro l'algebra era un eccellente metodo risolutivo dei problemi aritmetici e geometrici, ma non era un metodo dimostrativo. [Fig,34]. Per dimostrare esisteva solo la via geometrica, quella degli antichi matematici. Tra questi metodi si prende in esame quello attribuito a Filone di Bisanzio, ingegnere vissuto nel III sec. a. C., il più simile graficamente alla figura sulla lavagnetta euclidea e probabilmente il più diffuso perché si presta bene ad essere anche un metodo grafico per il calcolo della radice cubica. Il primo a pubblicarlo è l'umanista piacentino Giorgio Valla.

44 Pacioli (1494, 44v).

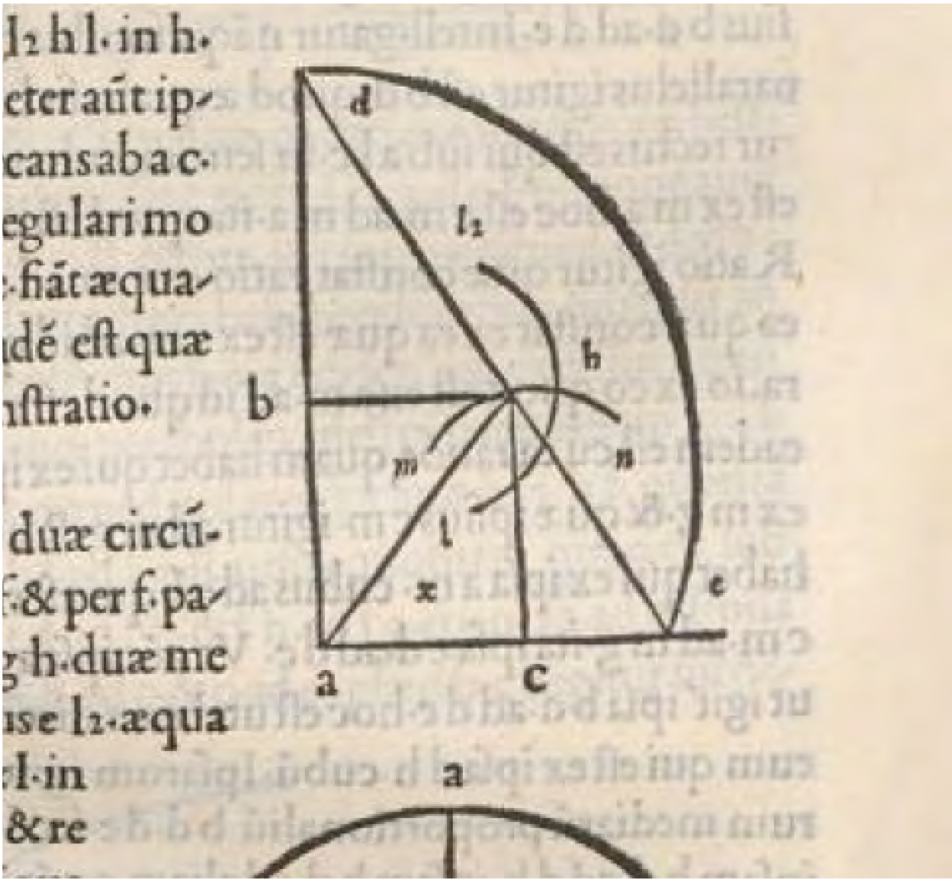


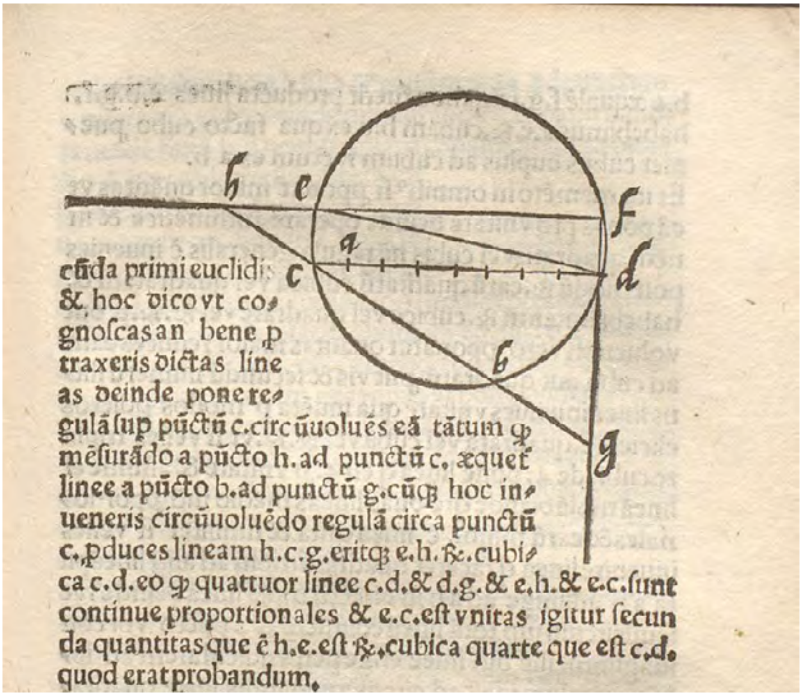
Fig. 34. Metodo di Filone di Bisanzio per la duplicazione del cubo.

Il disegno che affianca la dimostrazione è approssimativo e inadeguato, fatto del resto normale per un libro come l'*Opus* stampato nel 1501 su argomenti matematici estremamente difficili, e fino ad allora sconosciuti[45].

Ben più comprensibili sono le figure nella *Practica arithmetice* del medico, matematico, astrologo, filosofo, occultista, Girolamo Cardano (1501-1576)[46]. Cardano, eccellente algebrista, inizia proprio dall'utilizzo del metodo di Filone per il calcolo della radice cubica di un numero, lo considera un metodo generale applicabile a qualsiasi numero [Fig. 35].

45 Valla (1501, libro XIII, cap. IIII, ff. non num).

46 Cardano (1539, cap. 67, n. 34).



cūda primi euclidis
& hoc dico vt co-
gnoscas an bene p
traxeris dictas line
as deinde pone re-
gulā sup pūctū c. circūuoluēs eā tātum ꝙ
mēsurādo a pūcto h. ad punctū c. æquet
linee a pūcto b. ad punctū g. cūq; hoc in-
ueneris circūuoluēdo regulā circa punctū
c. pduces lineam h.c.g. eritq; e.h. ℞. cubi-
ca c.d. eo ꝙ quattuor linee c.d. & d.g. & e.h. & e.c. sunt
continue proportionales & e.c. est vnitas igitur secun
da quantitas que ē h.e. est ℞. cubica quarte que est c.d.
quod erat probandum.

Fig. 35. Metodo di Cardano per la duplicazione del cubo, Cardano (1539).

A titolo di esempio mostra il calcolo della $\sqrt[3]{8}$, lo stesso esempio si trova nella *Summa* del Pacioli[47]. I passaggi sono: si costruisce il rettangolo *CDFE*, si divide *CD* in 8 parti uguali, il lato minore del rettangolo deve essere uguale a una parte *DF* = *CA*. Si traccia la circonferenza avente il centro nel punto medio della diagonale *DE* passante per i vertici del rettangolo *CDFE*. Si manda la linea passante per il punto *C* con inclinazione tale che *CH* = *BG*. Sotto queste condizioni se il segmento *CD* vale 8, il segmento *EH* vale la $\sqrt[3]{8} = 2$. Cardano non dà nessuna giustificazione del procedimento, come d'uso nei testi di matematica pratica.

47 Pacioli (1494, 47r e 47v).

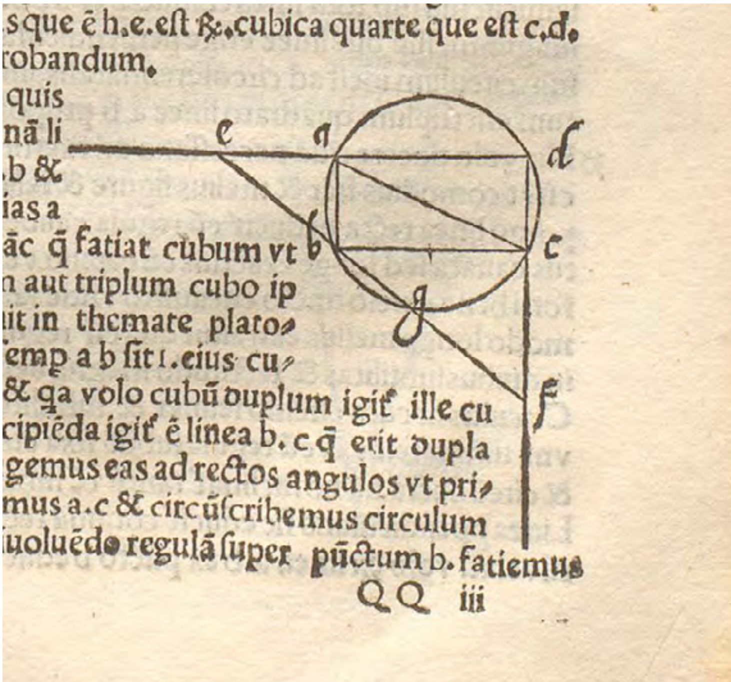


Fig. 36. Cardano (1539).

Lo stesso sistema viene poi adottato per duplicare il cubo, dovendo quindi trovare la $\sqrt[3]{2}$ le dimensioni del rettangolo saranno $BC = 2AB$[48]. Cardano a titolo di dimostrazione, riecheggiando Menecmo, si limita a dire che dati quattro numeri o segmenti, dei quali il primo è l'unità di misura a cui sono riferiti gli altri tre, se stanno in proporzione continua tra loro, allora il secondo è la radice cubica del quarto, nel caso presente si ha $AB : AE = AE : CF = CF : BC$ [Fig. 36].

Una dettagliata rassegna dei vari metodi di duplicazione si trova nel *General trattato de' numeri et misure* di Nicolò Tartaglia, Venezia 1560. Tartaglia riporta integralmente il procedimento dimostrativo di Filone traducendolo quasi in modo letterale dall'*Opus* del Valla. A parte la disposizione delle lettere, le condizioni iniziali rimangono le stesse del Cardano, in particolare

$AH = BC = 2AD$, e l'uguaglianza $BD = EF$. (1)

La tesi da dimostrare è $BC : CF = CF : AD = AD : AB$.

Per la (1) si ha $DE \times BD = BF \times EF$. (2)

Per il teorema delle secanti applicato alle rette che partono da D e intersecano la circonferenza $ABECH$, si ha $DE \times DB = DH \times AD$

48 Cardano (1539, cap. 67, n. 34).

Per la (2) diventa $BF \times EF = DH \times AD$ (3)

Per il teorema delle secanti applicato alle rette che partono da F e intersecano la stessa circonferenza si ha $BF \times EF = FH \times CF$.

Per la (3) si ottiene

$DH \times AD = FH \times CF$ (4) che è il risultato determinante della dimostrazione [Fig. 37].

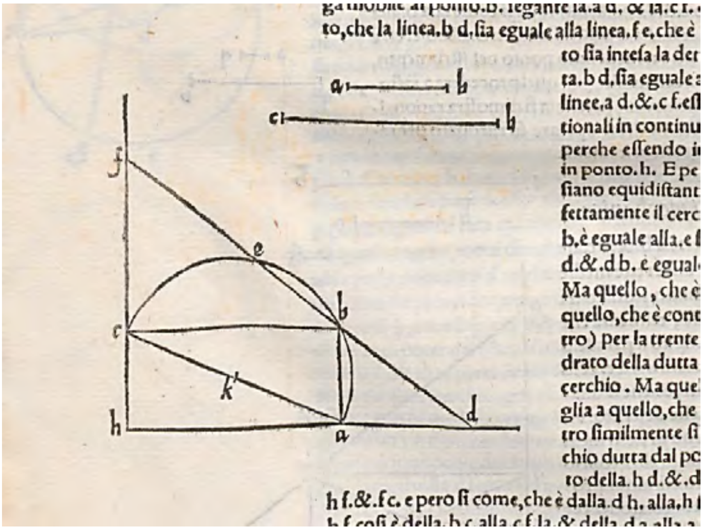


Fig. 37 Tartaglia (1560, Libro primo, quinta parte, 44v).

A questo punto Filone di Bisanzio, o chi per lui, passa dalle uguaglianze di prodotti alle uguaglianze di rapporti, passaggio che coincide con quello dai teoremi delle secanti ai teoremi sulla similitudine dei triangoli, i primi si 'gestiscono' meglio con la uguaglianza dei prodotti, i secondi con quella tra i rapporti.

Pertanto la (4) viene così espressa $DH : FH = CF : AD$. I triangoli DHF e BCF sono simili per cui $DH : FH = BC : CF$, per la (4) si ottiene $BC : CF = CF : AD$ (5) che è la prima parte della tesi da dimostrare.

Per la similitudine dei triangoli ADB e BCF si ha $AD : AB = BC : CF$, inserita nella (5) completa la tesi $BC : CF = CF : AD = AD : AB$.

Si sono così inseriti tra i segmenti AB e BC, con $BC = 2AB$, due segmenti AD, CF, medi proporzionali in proporzione continua come dalla proposta di Menecmo. In conclusione il cubo con spigolo CF ha volume doppio di quello del cubo con spigolo AD.

La dimostrazione è del tutto generale, la costruzione grafica di Filone non è legata a precondizioni, nel senso che rimane valida qualunque sia il rapporto tra i lati del rettangolo BC e AB. Se $BC = 5AB$ la costruzione fornisce lo spigolo del cubo con volume quintuplo del volume prefissato, in questo caso il segmento misurerebbe $3\sqrt{5}$.

Va infine specificato che la costruzione grafica effettuata trasgredisce i criteri della riga e compasso, l'uguaglianza $EF = BD$ ottenuta ruotando il segmento DF intorno al punto B, richiede la misura della loro lunghezza, ovvero che la riga sia graduata, il che non è ammesso.

10. Una nuova figura cosmica?

L'intreccio delle linee dell'esagramma e del rettangolo potrebbe nascondere qualcosa che non siamo riusciti ad afferrare; eppure siamo convinti di aver portato in luce la matematica implicata dai disegni nelle due lavagnette. Però non era quello il traguardo finale, i nostri matematici dovevano trovare il modo di partecipare al dibattito filosofico in pieno svolgimento nella *Scuola di Atene,* perché di filosofia qui si argomenta, dall'etica alla cosmologia, per rifarci al titolo dei due volumi che Platone e Aristotele si portano dietro.

In realtà la sollecitazione riguarda soprattutto la lavagnetta euclidea, piuttosto criptica; decisamente più esplicito è il messaggio della tavoletta pitagorica che ha come protagonista il numero 10 il numero perfetto, la forma dei numeri e la formazione dei numeri, i rapporti armonici tra numeri e suoni, tutta la tavoletta è un richiamo al numero come principio costitutivo delle cose. Insomma si è trovato un modo efficace per presentare la filosofia pitagorica riproponendo la sua immagine tradizionale.

Molto più problematica si presenta quella che abbiamo chiamato lavagnetta euclidea, problematica sia dal punto di vista matematico, sia da quello filosofico. In quell'esagramma con all'interno un rettangolo diagonalizzato abbiamo rintracciato i poligoni stellati, la sezione aurea, la duplicazione del cubo, ovvero la semplice e la doppia media proporzionale. Sono risultati senz'altro apprezzabili, tuttavia se dovessero rimanere il risultato finale, sarebbe un punto di arrivo morto, un qualcosa di riduttivo, passerebbe l'immagine di una geometria che si rifiuta di prendere parte al dibattito filosofico che l'affresco rende in modo magistrale. Anche la lavagnetta euclidea è chiamata a parteciparvi, altrimenti a che scopo architettare una figura così complicata matematicamente come l'esagramma con incluso un rettangolo diagonalizzato? Nell'ambito di quale discorso filosofico si pone? La domanda coinvolge l'ideatore del marchingegno matematico, che non può essere Raffaello, forse Raffaello non è stato nemmeno l'esecutore materiale della porzione di affresco in cui figura la lavagnetta con il relativo disegno, certamente condivideva gli intenti del matematico che aveva escogitato quella particolare figura. Ma chi era, o chi erano costoro? Non disponiamo d'informazioni sufficienti per rischiare nomi di persone che poco o tanto abbiano dato un contributo ai testi matematici nelle due lavagnette. D'altra parte tutto il ciclo degli affreschi nella Stanza della Segnatura si trova nelle stesse condizioni; si ripropone e resta aperta la domanda sugli interlocutori di Raffaello Sanzio negli anni tra il 1508 e il 1511 quando affrescava la Stanza della Segnatura su temi di grande impegno come la fede, la bellezza, la giustizia, la ragione – quattro affreschi sopra superfici a forma di segmento circolare con corda di circa 770, 772, 660, 660 cm –.

Non conosciamo il nome dell'ideatore della figura nella lavagnetta geometrica, sappiamo invece cosa aveva in mente. Il rettangolo non è un rettangolo qualsiasi, è un rettangolo con il lato minore metà del lato maggiore; un rettangolo che soddisfa questi requisiti è il rettangolo che sta alla base della costruzione sia del segmento medio proporzionale, sia dei due segmenti medi proporzionali. Come abbiamo mostrato. È proprio qui che il discorso matematico s'interseca col discorso filosofico, più precisamente con la cosmogonia, il cui 'testo sacro', il *Timeo* di Platone, era noto in versione latina già parecchi secoli prima che Raffaello dipingesse la *Scuola*. La tesi che il *Dialogo* platonico sostiene è la seguente: il mondo è stato fatto secondo un modello proporzionale, ciò che tiene unito il mondo è la doppia proporzione continua tra i quattro elementi che lo costituiscono. «Prima di allora tutte le cose erano senza rapporto e senza misura; ma quando [il dio] prese a ordinare l'universo a queste cose egli dapprima dette forme e numeri»[49].

Alla domanda su come «forme e numeri» riescono a «ordinare», a realizzare un legame, i nostri matematici-umanisti avrebbero risposto con una sola parola: *αναλογια*, proporzione. Avrebbero citato uno dei passi più noti del *Timeo*:

«Il più bello dei legami è quello che fa di se stesso e delle cose riunite quanto più possibile una vera unità e questo nel modo più bello lo effettua la proporzione»[50].

Prendendo la proporzione continua semplice come «il più bello dei legami», la «vera unità» così si esplicita:

«Infatti quando di tre numeri, o pesi, o potenze qualunque [a, b, c] quello di mezzo [b] è tale che il primo stia ad esso come esso sta all'ultimo [$a : b = b : c$], e inversamente che l'ultimo sta al medio come il medio sta al primo [$c : b = b : a$], e che il medio diventi primo e ultimo [$b : a = c : b$.], e l'ultimo e il primo diventino

49 Platone, *Timeo*, 53 a-b. Cfr. Platone (2022, pp. 108-109).

50 Platone, *Timeo*, 31-32. Cfr. Platone (2022, pp. 46-51).

ambedue termini di mezzo [$b : a = c : b$.], allora necessariamente tutti i termini hanno la stessa funzione e comportandosi allo stesso modo gli uni rispetto agli altri formano realmente una unità»[51].

Tuttavia la proporzione continua semplice si limita a tre termini, oggi diremmo che non è un algoritmo abbastanza potente nel caso che i termini diventino quattro.

«Se dunque il corpo del Tutto fosse piano, senza profondità, una sola media basterebbe a legare insieme se stessa e le altre cose, ma poiché il corpo del Tutto doveva essere solido, e i solidi non vengono collegati da una media, ma sempre da due medie, perciò Dio ha posto l'aria e l'acqua nel mezzo, tra il fuoco e la terra disponendo, per quanto possibile, l'un elemento rispetto all'altro nello stesso rapporto, sicché come il fuoco sta all'aria, così l'aria sta all'acqua, e come l'aria sta all'acqua così l'acqua sta alla terra».

L'algoritmo adeguato è la doppia media proporzionale, la proporzione che tiene insieme il «Tutto» è doppia:

fuoco : *aria* = *aria* : *acqua* = *acqua* : *terra*

Euclide nelle proposizioni 11 e 12 del libro VIII degli *Elementi* dà la formulazione matematica di queste relazioni. La proposizione 11 stabilisce che tra due numeri quadrati $a2$ e $b2$ si può inserire un solo numero medio proporzionale.

$a2 : ab = ab : b2$

La proposizione 12 stabilisce che tra due numeri cubi $a3$ e $b3$ si possono inserire due numeri medi proporzionali.

$a3 : a2\,b = a2b : a\,b2 = a\,b2 : b3$.

Qui matematica e filosofia trovano un punto d'incontro, reso visibile dal rettangolo con la diagonale, questa semplice e strana figura è il segno di una visione cosmogonica che si è fatta concezione cosmologica. Una vicenda che ha avuto la proporzione come protagonista, i quattro elementi, terra, acqua, aria, fuoco, stanno insieme, componendo un tutto unito e armonico, solo se si trovano nelle giuste proporzioni stabilite dagli inconfutabili teoremi della geometria.

Qui finalmente avviene un altro incontro quello tra l'esagramma e il rettangolo con diagonale, e si realizza il pieno significato della lavagnetta euclidea. La cosmologia filosofico-matematica raggiunge la sua pienezza se nutrita e guidata da una dimensione sapienziale, la stessa che rendeva Salomone splendido e giusto sovrano.

51 Ibid.

11. Astronomia e geografia

Nell'estremo destro dell'affresco, subito sopra il gruppo degli euclidei, è collocata la restante arte liberale, cioè l'astronomia, che chiude il quadro delle matematiche. All'estrema sinistra le 'scienze' della quantità discreta immobile – aritmetica –, e della quantità discreta mobile – musica. A destra le 'scienze' della quantità continua immobile – geometria –, e della quantità continua mobile – astrologia-astronomia –. Va notata una differenza, il gruppo dei pitagorici fa capo a una sola *auctoritas*, il gruppo dei geometri euclidei fa capo a tre diverse *auctoritates* Euclide, Tolomeo, Zoroastro, per questo Raffaello lo ha diviso in due sottogruppi, quello di Euclide con i suoi quattro allievi, quello di Zoroastro e Tolomeo. Euclide e Tolomeo vissuti ad Alessandria d'Egitto, il primo nel III sec. a.C., l'altro nel II sec. d. C., facevano parte della memoria urbinate di Raffaello, per i relativi ritratti nello studiolo del duca e per la dedica. Del ritratto di Euclide si è parlato; quello di Tolomeo è il seguente:

«Cl[audio] Ptolemaeo Alex[andrino] ob certam astrorum dimensionem, inductasque orbi terrarum lineas vigiliis laborique aeterno, Federicus dedit». Federico dedicò [questo ritratto] a Claudio Tolomeo Alessandrino per i precisi calcoli astronomici e per le linee tracciate sulla Terra con osservazioni e con incessante opera.

La dedica è ineccepibile anche per uno storico moderno perché celebra Tolomeo astronomo-matematico dell'*Almagesto* e Tolomeo geografo della *Geografia*, mentre ignora l'ugualmente famoso Tolomeo astrologo del *Quadripartito*. Il dedicante, il duca Federico, sappiamo che dava poco credito all'astrologia giudiziaria, sempre nello studiolo un cartiglio porta la scritta «Virtutibus itur ad astra», ossia: con le virtù ci si innalza fino alle stelle. Per Federico è la «virtus» e non le stelle a decidere il destino degli uomini [Fig. 38].

Fig. 38. Ritratto di Tolomeo, Studiolo di Federico da Montefeltro, Urbino (Public Domain).

Nel ritratto urbinate Tolomeo tiene in mano una sfera armillare, il tradizionale oggetto-simbolo della astrologia-astronomia, ha in testa una corona, secondo una consolidata quanto erronea tradizione iconografica che considerava l'astrologo-astronomo alessandrino facente parte della dinastia dei Tolomei che regnava sull'Egitto.

Fig. 39. Sfera armillare nel Ritratto di Tolomeo, Studiolo di Federico da Montefeltro, Urbino (Public Domain).

La sfera armillare è uno strumento ostensivo e didattico, non di osservazione, materializza i fondamentali cerchi di riferimento astronomici: eclittica, equatore celeste, fascia dello Zodiaco, coluri [Fig. 39]. Portare una sfera armillare in difesa e sostegno dell'astrologia-astronomia nell'ambito di un dibattito filosofico sarebbe stato riduttivo, un tecnicismo fuori luogo. Raffaello aveva idee chiare in merito; erano maturate durante il soggiorno fiorentino quando aveva visto il cielo stellato dipinto nel soffitto della Sacrestia vecchia di San Lorenzo, e lo stesso cielo nella Cappella Pazzi presso Santa Croce. Il cielo in San Lorenzo venne eseguito nel 1443 da Giuliano d'Arrigo detto il Pesello, sotto la guida del famoso astronomo Paolo dal Pozzo Toscanelli, e rappresenta la configurazione del cielo il 4 luglio 1442. L'indicazione che veniva dagli affreschi astronomici fiorentini era inequivocabile, andava raffigurata la sfera dell'intero universo, cioè un globo celeste, non uno strumento astronomico come la sfera armillare o l'astrolabio [Fig. 40].

Fig. 40. Giuliano d'Arrigo detto il Pesello, *Cielo stellato,* Cappella Pazzi, Santa Croce, Firenze, 1442 (Sailko, CC BY 3.0).

La proposta iconografica di affiancare al globo celeste un globo terrestre creava difficoltà perché alle tradizionali quattro arti del quadrivio si aggiungeva la geografia, il che costringeva Raffaello a ripensare l'impostazione del gruppo euclideo. Dipingere i due globi, quello astronomico e quello geografico, entrambi in mano a Tolomeo, era una soluzione improponibile: uno dei globi andava assegnato a un altro illustre personaggio. Chi poteva essere e con quale globo?

La decisione finale è un Tolomeo geografo con tanto di corona regale, un Tolomeo giovane, dal volto incognito, unico di spalle tra i personaggi dei gruppi pitagorici ed euclidei. Nel globo che tiene in mano è evidente il disegno delle terre e dei mari; si nota subito, non c'è ombra di dubbio, che la figura delle terre allora note è presa dalla carta del mondo di Tolomeo; tra i mari, infatti, spicca il particolare del colore rosso scuro del mar Rosso come si vede in molte versioni della *Geografia*[52].

Fig. 41. Tolomeo in Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene*, particolare della lavagnetta euclidea (Public Domain).

L'opera aveva conosciuto una ricca tradizione manoscritta, affiancata delle edizioni a stampa a partire dal 1473, pertanto in questo caso non si pone il problema di rintracciare le fonti. È plausibile che la decisione d'inserire tra le arti la geografia sia in parte dovuta alle scoperte geografiche in pieno sviluppo; decisiva tuttavia dovette risultare la posizione dello stesso Tolomeo che presenta la *Geografia* come opera rivoluzionaria rispetto ai precedenti testi in materia.

La cosmografia, dice Tolomeo, è altra cosa rispetto alla corografia; quest'ultima è una sorta di cartografia ingenua, si limita a descrivere 'a vista' un territorio, cioè secondo criteri di tipo empirico. La cosmografia, invece, ottiene una rappresentazione della superficie terrestre avvalendosi di strumenti matematici come le proiezioni, di riferimenti astronomici, di misure a terra e traccia una immagine proporzionale della superficie terrestre [Fig. 41].

Il titolo *Geografia* va inteso, secondo l'uso greco, nel senso di trattato di cartografia ed era l'unico testo di questo genere allora esistente. Grazie all'opera tolemaica la materia geografica acquistava pari valore rispetto alle altre discipline matematiche. Si spiega così la sua presenza nell'affresco e si comprende la presenza di Tolomeo in quanto 'padre' della geografia 'scientifica'.

52 BAV, codice Urb. Lat. 277.

Fig. 42. Tolomeo, *Cosmographia*,ù (Public Domain).

Rimaneva il problema di chi mettere al posto di Tolomeo a sorreggere il globo celeste. Tolomeo era il più rappresentativo degli astrologi-astronomi. Da secoli e secoli le sue opere, l'*Almagesto* e il *Quadripartito,* erano i testi base della astrologia-astronomia, nessun altro autore poteva seppur lontanamente vantare tanta autorità [Fig. 42].

Chi scegliere come personaggio emblematico dell'astronomia? Un astrologo-astronomo di tradizione greca come Ipparco, o risalire a Zoroastro, leggendario profeta iranico, mitico fondatore dell'astrologia, vissuto pare nell'Età del bronzo tra il XV e IX secolo a.C.? E poi cosa dipingere nel globo tenuto in mano da tanto remoto personaggio? Come era il suo cielo? Alla fine Raffaello opta per Zoroastro e per dipingere sul globo celeste un uniforme cielo stellato; una scelta in linea con la secolare tradizione dei cieli stellati indifferenziati dipinti su cupole, soffitti e volte. Per rendere l'idea che siamo ai primordi della astronomia Raffaello dipinge quella che si può chiamare una icona del cielo.

Chi desiderava cielo migliore poteva guardare a sinistra nel riquadro tra la *Scuola di Atene* e il *Parnaso* dove è affrescata l'allegoria del *Motore immobile*, dove una intelligenza motrice mantiene in moto la sfera delle stelle fisse. Raffaello presenta un cielo trasparente, ricco di costellazioni, le stelle sembrano incastonate in una sfera cristallina che è visibile, e nel contempo trasparente in modo che sia visibile la Terra, corpo opaco, immobile al centro della sfera. In primo piano si distingue il punto dell'equinozio di primavera, ottenuto dall'intersezione tra il cerchio dell'Equatore celeste e il cerchio dell'Eclittica, situato in corrispondenza della costellazione zodiacale dell'Ariete; è detto anche punto γ per la somiglianza della lettera greca con il simbolo della costellazione dell'Ariete. Il punto γ segna l'equinozio di primavera, che al tempo di Raffaello cadeva il 10 marzo anziché il 21 marzo – il calendario verrà riformato nel 1582 –, il giorno in cui il Sole attraversa il piano dell'equatore illuminando la Terra da polo a polo; quindi in tutte le parti della Terra la durata del giorno è uguale a quella della notte.

Fig. 43. Raffaello Sanzio, Stanza della Segnatura, allegoria del *Motore imobile* (Public Domain).

Al tempo di Raffaello, con l'astrologia in auge, l'equinozio segnava l'inizio del nuovo anno ed era carico di significati religiosi e teologici. Lo sintetizza bene Paolo da Middelburg (1445-1534) astrologo dei duchi di Urbino nonché vescovo di Fossombrone:

«La Sacra scrittura insegna che il mondo fu creato nell'equinozio, quando fu fatta la luce e divisa dalle tenebre, e in questo stesso tempo avvenne il peccato del primo uomo che doveva essere riparato da Cristo. Quindi l'incarnazione del figlio di Dio doveva avvenire nell'equinozio di primavera, tempo in cui i dottori della Chiesa dicono che fu creato il mondo» [Fig. 43].

L'equinozio al tempo della nascita di Cristo cadeva nel giorno ottavo dalle calende di aprile [dal primo di aprile], secondo le osservazioni di Tolomeo e gli scritti di altri astrologi, e il Verbo di Dio fu incarnato nello stesso giorno dell'equinozio. E questo sembra testimoniarlo Cristo stesso quando dice che «la luce venne nel mondo perché chi crede in me non resti nelle tenebre»[53].

C'erano buoni motivi perché la «sphaera mundi» fosse dipinta con il punto γ al centro, non con un orientamento qualsiasi.

Procedendo a sinistra del punto γ si vedono in semitrasparenza le ultime due costellazioni zodiacali dell'inverno, i Pesci e l'Acquario, raffigurato come un robusto portatore d'acqua; dietro l'Acquario si intravvede il Capricorno. A destra del punto γ dovrebbero trovarsi Ariete e Toro; vediamo un animale simile a un cavallo; forse in basso campeggia la grande costellazione del Ceto, ossia il Cetaceo.

Per quanto riguarda le fonti possibili usate da Raffaello deve essere stato abbastanza facile accedere ad atlanti, a globi celesti e ottenere informazioni dai numerosi astrologi che circolavano negli ambienti romani e che erano al servizio di cardinali e papi. Basti l'esempio di papa Giulio II (1443-1513), che fece calcolare dagli astrologi il giorno propizio per la sua incoronazione. Un sicuro interlocutore di Raffaello è stato Paolo da Middelburg. Certo è anche il fatto che Raffaello durante gli anni fiorentini sia stato nelle chiese di Santa Croce e di San Lorenzo dove, come si è detto, si poteva ammirare il cielo dipinto dal Pesello. La bella novità di Raffaello sta nell'aver dipinto non una volta stellata, ma l'intera sfera dell'universo con la Terra al centro, il tutto visto dall'esterno, come appare agli occhi dell'Intelligenza motrice.

****

Ci siamo occupati di Raffaello architetto, di Raffaello geografo, abbiamo cercato di stabilire quanta e quale matematica fosse implicata nella *Scuola di Atene*, cosa e quanto Raffaello ne sapeva. Non si è fatta parola su come Raffaello impiegava e intendeva la matematica coinvolta nel campo della pittura, abbiamo ignorato la matematica racchiusa nei dipinti del genio urbinate, quella recondita geometria in nome della quale numerosi dipinti, alcuni di Raffaello, sono stati ricoperti di linee e di cerchi nel tentativo, sempre riuscito, di svelare questi segreti geometrici e numerici.

La *Scuola di Atene* è l'opera di Raffaello più ricca di riferimenti prospettici favoriti dalla scelta di collocare la scena filosofica all'interno di una splendida basilica. Un ambiente vasto, simmetrico, formato da tre volte a botte coassiali impreziosite da un soffitto a cassettoni esagonali e quadrangolari, reso in prospettiva frontale; un ambiente che, per così dire, parla da solo, Raffaello lo lascia

53 Middelburg (1513, pagine non numerate, parte II, libro XIX, cap. IV).

sgombro da qualsiasi altro oggetto. Una dimostrazione di virtuosismo prospettico, di abilità scenografica, di sapienza architettonica, perché della basilica «non esistevano esempi precisi ai quali Raffaello potesse ispirarsi»[54].

Quando agli inizi del Cinquecento Raffaello dipinge la *Scuola di Atene*, la prospettiva aveva alle spalle circa un secolo di vita e aveva perso molta di quella valenza matematica che tanto appassionava Piero della Francesca e faceva passare notti insonni a Paolo Uccello. La rappresentazione in prospettiva era diventata una delle tecniche "normali" che un numero crescente di pittori maneggiava. In definitiva bastava saper eseguire delle operazioni grafiche standard, regole operative per giungere al risultato atteso. Ai pittori non interessavano le ragioni matematiche di quelle regole. Insistiamo nel dire che le conoscenze prospettico-matematiche di Raffaello non andavano molto oltre questo livello. Dopo di che c'era l'applicazione della tecnica, ma a questo punto diventava una questione di abilità e di precisione e non di conoscenze teoriche sulla vista e di capacità matematiche.

Storicamente la prospettiva nasce come tecnica di bottega, non viene dedotta dall'*Ottica* di Euclide e neppure da quella dell'arabo Alhazen. In quanto tecnica di bottega comprende varianti, approssimazioni, insomma operazioni non codificate, né a volte codificabili, frutto di quella intelligenza tecnica che trova con modi suoi il sistema per risolvere un dato problema.

Di questa circostanza si sono resi conto quegli autori che giustamente non si sono accontentati di tracciare alcune linee sulle fotografie dei dipinti per mostrare che convergono nel punto di fuga, ma hanno effettuato indagini più estese e rigorose come il controllo della spaziatura tra le linee trasversali. In nessuno dei numerosi dipinti esaminati si è rilevata l'applicazione delle regole canoniche della prospettiva, in particolare non si è trovato neppure un dipinto eseguito secondo la costruzione cosiddetta legittima di Leon Battista Alberti[55]. Anche il tentativo di ricostruire le tecniche prospettiche di bottega partendo dai dipinti si è mostrato impraticabile.

Dei lavori di preparazione del grande affresco della *Scuola di Atene*, è rimasto il cartone della parte inferiore, quella con il disegno dei filosofi, il cartone della parte superiore, di quasi esclusivo interesse prospettico, è andato perso[56]. Ma è possibile che non sia mai esistito, che il disegno di quelle architetture venne tracciato direttamente sulla parete senza l'ausilio di un apposito cartone. Nel cartone, di dimensioni 285 × 804 cm, conservato a Milano presso la Biblioteca Ambrosiana, oltre ai personaggi risulta evidente il tracciato delle parti architet-

54 Reale (2005, XIII).

55 Roccasecca (2001, 65).

56 Oberhubert (1974).

toniche della scena. In primo piano una serie di linee orizzontali parallele alla linea di terra e al quadro prospettico, segna i profili dei quattro gradini che conducono al piano del pavimento della *Scuola*.

Si dovrebbero intersecare con le ortogonali, le linee che partono dal punto di fuga collocato nell'asse centrale dell'affresco all'altezza delle teste di Platone e Aristotele, così da formare il pavimento a scacchi, ma di queste non c'è traccia. L'altezza dei quattro gradini via via diminuisce, ma non è dato stabilire come la "degradazione" sia stata ottenuta.

Un particolare prospettico notevole è che la linea individuata dai cornicioni delle prime due volte passa alquanto sopra il cornicione della volta di fondo, ciò vuol dire che quest'ultima è stata abbassata per dare migliore evidenza al cielo soprastante e per accelerare la prospettiva delle prime due volte il cui punto di fuga si abbassa [Fig. 44].

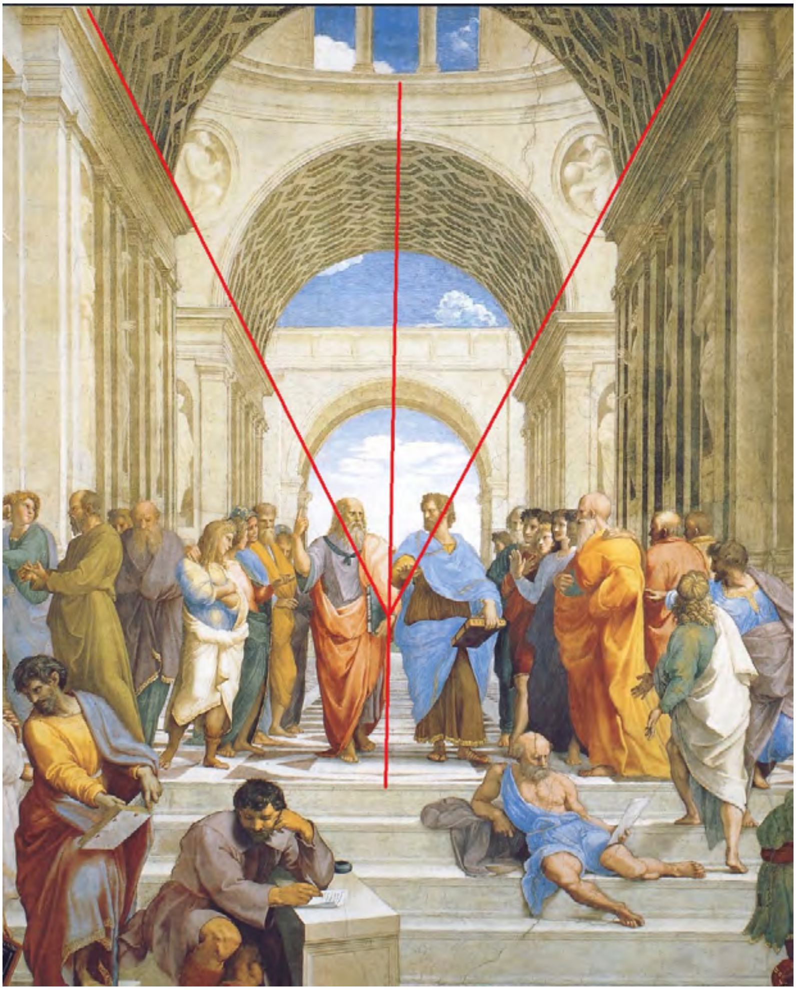


Fig. 44. Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene*, individuazione del punto di fuga (Public Domain).

Molto più fitta la serie di linee verticali che segnano i profili dei pilastri, delle cornici e delle pareti del 'tempio' filosofico: da un conteggio su una fotografia del cartone risultano oltre 150 linee verticali, e infine le serie di brevi linee inclinate che segnano le dimensioni delle cimase dei piedistalli.

Le distanze tra le linee verticali sono già prospetticamente scorciate perché provengono dalla parte superiore dell'affresco le cui architetture sono già tracciate con grande precisione e minuzia; a giudicare dal loro numero e distanza corrispondono alle 'degradazioni' della larghezza dei pilastri e delle annesse cornici. L'intero cartone appare attraversato da un fascio di linee verticali che corre sopra il disegno delle figure dei filosofi, mentre ci saremmo aspettati il contrario.

Per capire il motivo di un simile 'metodo' cade a proposito un rilievo di Giovanni Battista Armenini (1530-1609), pittore ma soprattutto osservatore e documentato critico delle opere di pittori quattro-cinquecenteschi. Nei *De' veri precetti della pittura libri tre*, Ravenna 1587, mette in guardia da quelli che chiama «maestri delle confusioni». Sono i pittori che credono di realizzare opere eccezionali riempiendo i dipinti di un gran numero di personaggi. Ottengono un «amuchiar di molte figure senza riguardo de' termini della compositione» (pp. 135 - 136)

Crediamo che questa sia una delle maggiori preoccupazioni di Raffaello, cioè cosa e come fare perché l'illustre, solenne, consesso filosofico, che vede la presenza di tutti i filosofi dell'Antichità, figuri come tale e non diventi una disordinata, multigesticolante, chiassosa e ultimamente ridicola turba filosofica?

Fig. 45. Raffaello Sanzio, cartone preparatorio della *Scuola di Atene*. Pinacoteca Ambrosiana, Milano. Particolare dei filosofi platonici (https://ambrosiana.it/opere/scuola-di-atene/).

Rispondere in modo credibile a una domanda del genere in sede di esecuzione dell'affresco nella parete era estremamente rischioso, se non impossibile, anche per un genio come Raffaello, troppi gli elementi, gli equilibri, i collegamenti, i gesti da tenere insieme, da equilibrare, da armonizzare [Fig. 45].

Si mostrava sempre più importante disporre di un cartone vicino, per quanto possibile, a quella che doveva essere la versione finale dell'opera. La preparazione di un cartone con queste caratteristiche diventa una operazione complessa, comprendente le bozze dell'intera opera, affiancata dallo studio di particolari da cui trarre nuove idee su come congegnare fatti e personaggi [Fig. 46]. Nonostante le molteplici attenzioni, il passaggio dal cartone all'affresco, dal precario al definitivo, è un momento drammatico che induce ripensamenti, conferma precedenti intuizioni, muta il punto di vista su alcuni personaggi.

Fig. 46. Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene*, particolare dei filosofi platonici (Public Domain).

Le figure 45 e 46 documentano bene una circostanza di questo tipo: nel cartone i discepoli di Platone rivolgono lo sguardo alla mano del maestro, al dito che perentorio indica la direzione verticale; nell'affresco lo sguardo degli allievi è rivolto altrove, sembra che stiano riflettendo sulle cose appena udite, che ne parlino tra loro.

Desta impressione la 'pioggia' di linee che provengono dalle soprastanti architetture e arrivano a intersecare le figure eseguite in precedenza. Sembra che Raffaello voglia in qualche modo superare la separazione tra l'ambiente in cui si svolge la scena – le architetture restituite in prospettiva – e i protagonisti della scena, desideri come una sintonia tra la gestualità dei personaggi e il ritmo dello spazio prospettico [Fig. 47].

Relativamente all'impianto architettonico della basilica Raffaello per accentuare la tensione verso l'alto sostituisce a una relazione tra altezza e larghezza pari a $\sqrt{2}$ il più agile rapporto $\sqrt{3}$. Infatti dato il triangolo rettangolo *ABC*, se *AB* =

$BC = 1$ si ha che la diagonale $AC = \sqrt{}\ (AB2 + BC2) = \sqrt{}\ 2 = 1{,}4$. Se $AB = 1$ e $BC = \sqrt{}\ 2$ allora la diagonale $AC = \sqrt{}\ (AB2 + BC2) = \sqrt{}\ 3 = 1{,}7$.

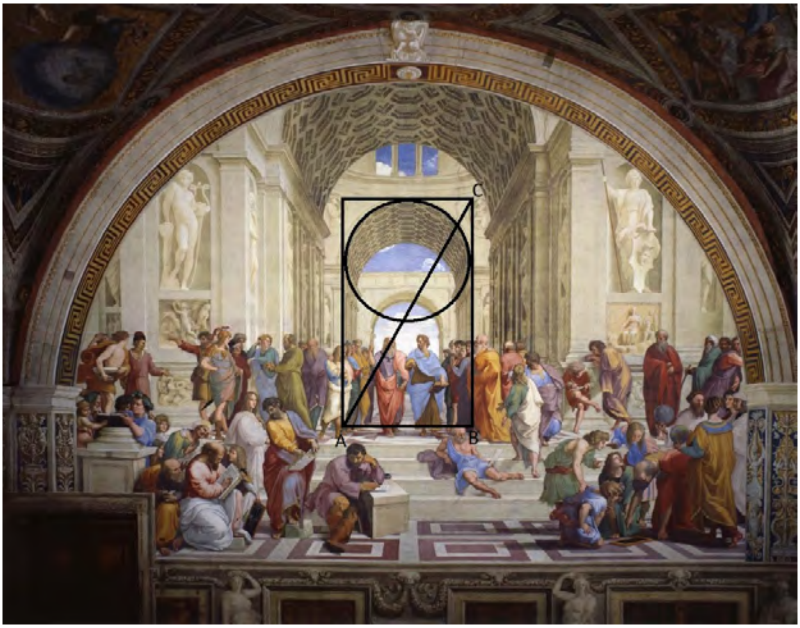


Fig. 47. Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene* (Public Domain), rapporto altezza/larghezza = √ 3.

Troviamo lo stesso rapporto altezza/larghezza = √ 3 nelle architetture della *Cacciata di Eliodoro* affresco di Raffaello sempre nelle Stanze vaticane.

****

In via puramente informativa, facciamo cenno alla presenza di rapporti numerici in altre opere di Raffaello. Nello *Sposalizio della Vergine* troviamo un rapporto di 2 a 3 tra larghezza L e altezza H del quadro, stesso rapporto $L/H = 2/3$ vale tra l'altezza del Tempio H' e l'altezza della scena sottostante H'' [Fig. 48]. Per il Tempio reso frontalmente l'altezza T' è uguale alla larghezza T.

Fig. 48. Raffaello Sanzio, *Sposalizio della Vergine*, Brera, Milano (Public Domain).

Sono schemi compositivi piuttosto semplici e in generale tali rimangono nei dipinti di Raffaello, per le Madonne con Bambino il Maestro predilige la composizione triangolare ovvero a piramide. Nella Madonna Carnigiani il triangolo è equilatero [Fig. 49].

Fig. 49. Raffaello Sanzio, *Sacra Famiglia Carnigiani*, (1507) Alte Pinakothek, Monaco (Public Domain).

Poche volte Raffaello pittore ricorre alla sezione aurea, secondo Guglielmo De Angelis d'Ossat il rapporto aureo è «assai raro nel Sanzio»[57]. Sembra fare eccezione la grande pala d'altare della *Trasfigurazione* che vede riuniti due episodi evangelici, Gesù sul monte Tabor trasfigurato in vesti «candide come la luce», il fanciullo ossesso che Cristo guarisce al suo ritorno dal monte Tabor. Due punti di vista, ciascuno inquadrato da un rapporto aureo [Fig. 50].

Se si divide l'altezza del dipinto $H = 410$ cm secondo il rapporto aureo, la parte maggiore misura in cifra tonda 253 cm, $(\sqrt{5} - 1) / 2 \times 410 = 253$, la soprastante parte minore misura 157 cm. Trasferendo queste misure nel quadro si nota che la linea di separazione tra le due parti, determinata secondo il rapporto aureo, coincide con la linea dell'orizzonte che nel dipinto segna il passaggio dalla realtà terrena alla realtà divina. Compare nuovamente il rapporto aureo che regola il rapporto tra l'altezza di Cristo e la distanza tra le mani

$nn' : mm' = mm' : (nn' - mm')$.

57 G. De Angelis d'Ossat, «Le scelte proporzionali di Raffaello», in *Raffaello e la sezione aurea*, catalogo della mostra, Edizioni Bora, Bologna 1984, p. 70.

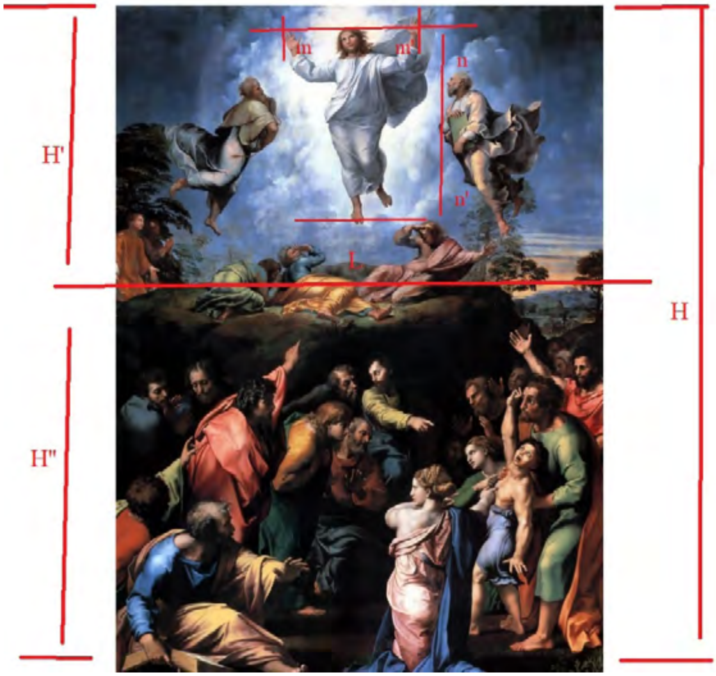


Fig. 50 Raffaello Sanzio, *Trasfigurazione*, Musei Vaticani, Città del Vaticano (Public Domain).

Come in altri dipinti il rapporto H/L altezza/larghezza è 3/2. Infatti le misure della tavola sono 410 × 279 cm; 410/279 = 1,47; 3/2 = 1,50.

Una nota finale su Raffaello architetto. Palazzo Branconio dall'Aquila è uno degli ultimi progetti di Raffaello, appartiene alla maturità architettonica del nostro [Fig. 51]. La facciata presenta un eccezionale contrappunto tra schemi proporzionali classici e innovazioni.

«Lì per la prima volta furono abbandonate le classiche norme sulla sovrapposizione dei piani digradanti in altezza (...) Invece di digradare in altezza prende la prevalenza il piano nobile legato agli altri due da un definito rapporto di proporzionalità»[58].

La facciata è divisa in tre fasce – contrassegnate dalle lettere A, B, C – distinte da altrettante cornici sporgenti, la fascia di mezzo ha dimensioni maggiori rispetto alle altre. L'altezza del piano terreno è la media delle altezze dei due piani soprastanti ovvero A = 3/2 C. Le altezze dei due piani soprastanti hanno rapporto ½. Per esempio A = 3; B = 4; C = 2. La facciata risponde al rapporto di 12 / 10 tra larghezza L e altezza H del Palazzo.

58 Ivi, 71-72.

Secondo Guglielmo De Angelis d'Ossat Raffaello non dedica particolare attenzione al rapporto aureo anzi «lo rifiuta in architettura»[59].

È il caso di ricordare che i rapporti, siano aurei o non aurei, sono ricavati dividendo le immagini dei reperti in parti che sicuramente hanno le loro ragioni d'essere, ma che conservano una più o meno elevata dose di arbitrarietà.

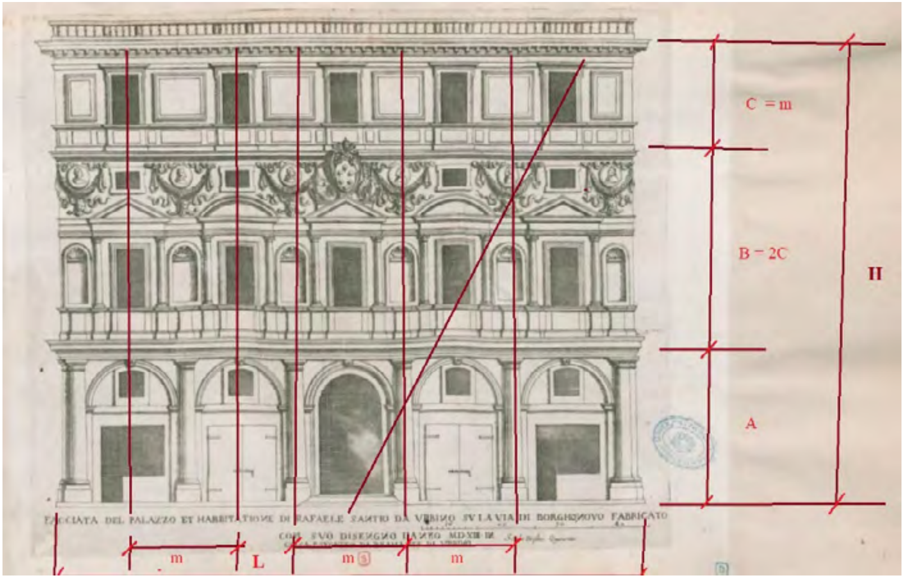


Fig. 51 Palazzo Branconio (tratto da AA.VV., 1984, 72).

12. Misure, proporzioni, approssimazioni

Abbiamo effettuato dei rilievi su alcuni dipinti di Raffaello nonché sulla facciata di palazzo Branconio dell'Aquila realizzata su disegno di Raffaello, alla ricerca di relazioni numeriche e di operazioni grafiche, ci interessava avere qualche dato su quanta e quale matematica il nostro pittore-architetto fosse disposto a mettere nelle sue opere.

Si è constatata la presenza di grandezze che oggi qualifichiamo come irrazionali e che scriviamo come √ 2, √ 3, √ 5, mentre a quel tempo la notazione era Rx 2, Rx 3, Rx 5, dove Rx è l'abbreviatura di «radix». Su queste radici vigeva una netta distinzione così espressa dal Pacioli:

59 Ibid.

«Quelle Rx che aponto si danno son dette discrete, over quadre, over rationali, e quelle che aponto non si possano dare, se non per via de aproximamento, sono dette Rx sorde, over indiscrete, over inrationali da li pratici vulgari»[60].

Le radici del primo tipo precisa Pacioli

«Non vol dire altro se non quando a noi sia proposto alcuno numero quadrato trovare la sua radici, cioè trovare un numero che multiplicato in se medesimo facia il ditto numero quadrato».

L'identità delle radici del secondo tipo è bene espressa dal nome «radici sorde»; sorde perché

«Le radici di numeri non quadrati non si possino perfettamente cavare, né dare per numero di sorte alcuna, né per numero rotto, né manco per numero integro, né manco per numero sano et rotto»[61].

La definizione di radice sorda è data in negativo, sono «sorde» tutte le radici quadrate di numeri che non sono quadrati perfetti. Ciò vuol dire che il calcolo numerico della $\sqrt{5}$ darà sempre risultati approssimati; abbiamo scelto come esempio la $\sqrt{5}$ perché rientra nel calcolo della sezione aurea. Il calcolo prevede i seguenti passaggi. Tenuto conto che $\sqrt{4} = 2$ è la «radice discreta» più vicina alla $\sqrt{5}$, in prima approssimazione si ha $\sqrt{5} = 2 + 1$ di avanzo. Il passaggio successivo prevede di costruire una frazione che ha come numeratore l'avanzo = 1, e come denominatore il doppio della radice già estratta $2 \times 2 = 4$. Si ricava così la frazione $1 / 4$, pertanto $\sqrt{5} = 2 + 1/4$. In notazione decimale $\sqrt{5} = 9/4 = 2{,}25$. Il calcolo corretto, approssimato alla sesta cifra decimale, dà $\sqrt{5} = 2{,}236068$.

Miglioriamo l'approssimazione della $\sqrt{5}$. Sappiamo che $\sqrt{5} = 2 + 1/4$, eleviamo al quadrato $(2 + 1/4) \times (2 + 1/4) = 5 + 1/16$. Il nuovo avanzo che va a formare il numeratore è $1 / 16$.

Per il denominatore vale sempre la regola di formarlo col doppio della radice già estratta, ossia il doppio di $2 + 1 / 4$. Quindi $2 \times (2 + 1/4) = 4 + 1/2 = 9 / 2$.

La parte frazionaria della $\sqrt{5}$ è data da

$1/16 \times 2 / 9 = 1/72$. Tale frazione va sottratta perché $\sqrt{5} = (2 + 1/4)$ è una approssimazione per eccesso alla $\sqrt{5}$. Pertanto

$\sqrt{5} = (2 + 1/4) - 1/72 = 161/72 = 2 + 17/72$

In decimali $\sqrt{5} = 2{,}236111$. Approssimata correttamente al milionesimo $\sqrt{5} = 2{,}236068$.

Il procedimento di calcolo è ricorsivo, può essere applicato in successione per trovare sempre migliori approssimazioni, ossia per trovare numeri i cui quadra-

60 Pacioli (1494, 45).

61 Tartaglia (1556, 24).

ti differiscono da 5 meno di qualsiasi numero prefissato. Al tempo di Raffaello le estrazioni di radice erano considerate operazioni difficilissime, molto spesso soggette ad errori. Del resto gli uomini di tutte le epoche non hanno mai amato fare i conti e hanno sempre cercato modi nuovi vuoi per facilitarli, vuoi per farne del tutto a meno. Nessuno si sarebbe mai avventurato a calcolare l'area di un triangolo con quella che chiamiamo formula di Erone che era nota perché la troviamo nei libri d'abaco. Dato il triangolo di lati a, b, c, e di semiperimetro p, la sua area misura $A = \sqrt{[p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)]}$. È un caso limite, ma bastava molto meno per scoraggiare intenzioni di calcolo. L'area di un terreno era trovata dividendolo in triangoli e facendo la somma delle loro aree, ciascuna delle quali era determinata dividendo per 2 il prodotto della misura di due lati. I «litterati», i «theorici», i «periti» potevano rivolgere le più giuste e violente critiche contro questo sistema, ma c'era anche di peggio, tanti «pratici vulgari» che stabilivano l'area di un terreno solo guardandolo.

«Periti» o «vulgari» che fossero, i personaggi di cui sopra appartengono alla categoria di quelli che Piero della Francesca chiama «arithmetici», i manipolatori di numeri e di regole di calcolo, distinguendoli dai «geometri» che manipolano linee rette e curve, superfici, volumi[62]. Si presenta di nuovo la distinzione tra quantità discreta e quantità continua «perochè l'arithmetico non considera se non della rationalità, el geometra della rationalità e irrationalità»[63].

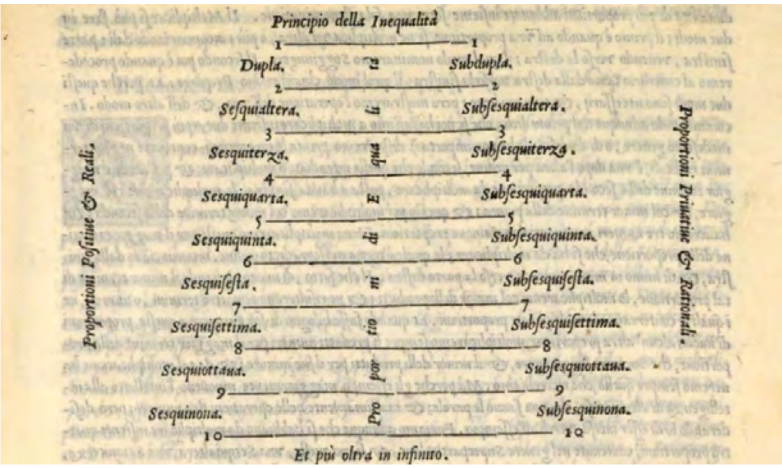


Fig. 52 Zarlino (1558, 41).

62 Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, XV secolo.

63 Pacioli (1509, 32v).

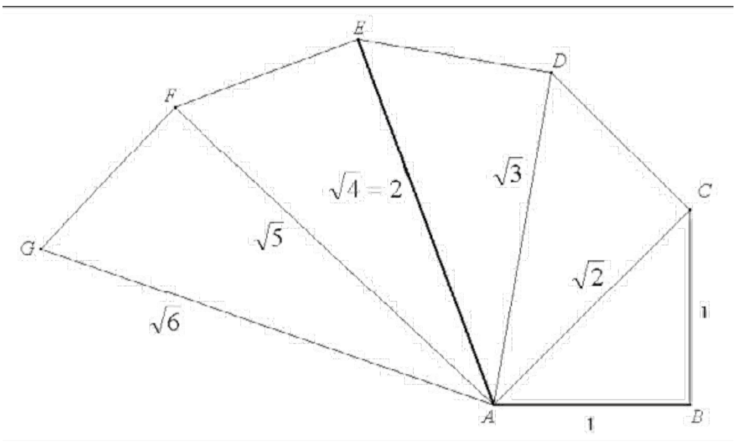
I geometri hanno una modalità di affronto completamente diversa. Data una linea retta o anche curva, con riga e compasso se ne può prendere una parte prefissata 1 / 2, 1 / 3, 2 / 3, 3 / 2, ... e così di seguito, «proportionando sempre quanto più potrete in parti note che per numero si possano mostrare», detto in altro modo sono tutte le frazioni il cui numeratore e denominatore sono numeri naturali. [Fig.52] Questo non è fattibile sempre e comunque, esistono innumerevoli eccezioni, per esempio «la irrationalità comme fra el diametro del quadro e sua costa», cioè il rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato non può essere espresso da una frazione formata da numeri naturali.

Si perviene ad una conclusione di grande rilievo:

«Peroché avvenga che non sempre per numero si possino nominare, ma mai fia impedito che per linea, superficie si possino assegnare, con ciò sia che la proportione sia molto più ampla in la quantità continua che in la discreta».

Quello che non si può esprimere esaurientemente in numeri può essere espresso in termini di linee e di superfici, dato che tra linee e tra superfici si possono istituire rapporti come tra numeri. Un esempio è la cosiddetta spirale di Teodoro da Cirene, matematico pitagorico del V secolo a.C.

Preso il segmento *CD* come unità di misura, si possono via via costruite le radici quadrate dei numeri naturali. La √ 2 è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele *ABC* con cateti = 1; la √ 3 è l'ipotenusa del triangolo rettangolo *ACD* avente il cateto minore = 1 e il cateto maggiore = √ 2.



Proseguendo, l'ipotenusa del triangolo rettangolo *ADE* è il doppio del cateto iniziale, abbiamo costruito anche una «radice discreta». Arriviamo alla citata $\sqrt{5}$ che è la diagonale di un rettangolo avente un lato doppio dell'altro, un rettangolo già incontrato a proposito della sezione aurea. Abbiamo segmenti che generano altri segmenti mediante operazioni grafiche, segmenti di lunghezza ben definita, razionali o irrazionali che siano.

Tuttavia la presenza di numeri è necessaria quando si adotta la tecnica del segmento-misura ovvero modulo, facciamo un esempio.

Un ipotetico pittore deve eseguire una pala d'altare su una tavola di pioppo alta 271 cm, per ragioni di composizione il dipinto avrà una parte superiore e una parte inferiore il rapporto in altezza tra superiore e inferiore deve essere $\sqrt{2}$ – ma non si sarebbe mai espresso così –,

Avrebbe disegnato il triangolo rettangolo isoscele *ABC* con lato *AB* supponiamo di 10 cm, l'ipotenusa *AC* misurerà $10 \times \sqrt{2} \approx 14$ cm, tuttavia per il pittore questi numeri erano inutili. Il pittore ha due segmenti *AB* e *AC* da apprezzare con un compasso per tracciare nel dipinto multipli o sottomultipli di *AB* e di *AC*.

Partendo dal basso avrebbe riportato col compasso lungo il bordo della tavola, 11 volte il segmento *AB*, poi di seguito, procedendo lungo la stessa linea, altre 11 volte il segmento *AC*, in numeri le due parti misureranno

$10 \times 11 = 110$ cm; $14 \times 11 = 154$ cm; in tutto $154 + 110 = 264$ cm.

Con qualche aggiustamento, perché si tratta sempre di misure approssimate, il nostro pittore ha ottenuto quanto voleva. Si è fatto un esempio, non è detto che questa fosse l'unica procedura, ad ogni modo il nostro pittore da buon tecnico ignora che la $\sqrt{2}$ è una grandezza incommensurabile, per lui è un segmento come gli altri. Ignora la provenienza dal teorema di Pitagora, se lo sa è per curiosità personale, perché l'ha sentito dire e lo ha memorizzato, può anche sapere che nei triangoli rettangoli si somma o si sottrae il quadrato dei lati come ha imparato alla scuola d'abaco, ma non ha certo studiato il primo libro degli *Elementi* di Euclide, perché la dimostrazione di un teorema è qualcosa di estraneo alla sua mentalità.

Tra i rapporti 'armoniosi' perché provvisti di valenza estetica, un posto è occupato dalla sezione aurea definita come la parte di un segmento media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente. Dato il segmento di lunghezza l, la sua parte aurea x viene determinata in base alla definizione

$l : x = x : (l - x)$ da cui $x2 = l2 - lx$

pertanto $x = l/2\,(\sqrt{5} - 1)$.

In decimali approssimando al millesimo $x = 0{,}618\, l$; approssimando al decimo

$x = 0{,}6\, l$; in frazioni $x = 6/10\, l = 3/5l$ come dire che la sezione aurea di un segmento lunghezza 10 è 6, lunghezza 5 è 3. Misure che all'incirca soddisfano la proporzione infatti

$10 : 6 \approx 6 : 4$ ovvero $10 \times 4 \approx 6 \times 6$ $40 \approx 36$
$5 : 3 \approx 3 : 2$ ovvero $5 \times 2 \approx 3 \times 3$ $10 \approx 9$

Secondo quello che si è detto non si tratta di errori, sarebbe meglio parlare di grado di approssimazione, i tecnici preferiscono lavorare con cifre tonde, nella alternativa tra esattezza e semplicità scelgono per quanto possibile la semplicità. Un brano della *Divina proportione* rende come erano trattate le discrepanze. Pacioli prende il caso di un progetto architettonico che deve essere ridimensionato perché «l'angustie e stretezza del luogo non permetteva fabricare con tutte quelle solemnità che a la vera architettura se aspectano»[64].

Rispetto al progetto le misure verranno così modificate:

Prendarete di loro sempre qualche parte o vero parti nota o vero note comme a dire la 1 /2, el 1 /3, li 3 /2, li 2 /3, et cetera o a loro circuito o vero diametri e quelli proportionando sempre quanto più potrete in parti note che per numero si possano mostrare.

Un'altra definizione di sezione aurea divide il segmento *l* in due parti *a* e *b*, e mette in primo piano la condizione del rapporto aureo tra le due parti anziché quella del rapporto aureo tra l'intero segmento e la sua parte maggiore. La definizione impone che la parte maggiore *a* stia alla parte minore *b* come la somma delle due parti sta alla parte maggiore.

$a : b = (a + b) : a$ da cui a2 = b2 + ab
pertanto a = b/2 ($\sqrt{5}$ + 1)
in decimali approssimando al decimo a = 1,6 b; in frazioni a/b = 16/10 = 8/5
La verifica
$16 : 10 \approx 10 : 6$ $10 \times 10 \approx 16 \times 6$ $100 \approx 96$
$8 : 5 \approx 5 : 3$ $8 \times 3 \approx 5 \times 5$ $24 \approx 25$

In conclusione ogni volta che da qualsiasi parte, in qualsivoglia manufatto, dipinto, oggetto naturale o artificiale compare un rapporto tra lunghezze di 8 a 5 o di 3 a 5 abbiamo una sezione aurea, resta aperta l'alternativa se si tratta di una sezione aurea consapevole o inconsapevole. Cioè se si riconosce che quei rapporti hanno proprietà speciali che li distinguono da altri rapporti. Lo stesso Pacioli dopo aver esaltato in lungo e in largo la *Divina proportione* nella prima parte dell'omonimo trattato, nel successivo trattatello di architettura non la nomina neppure una volta. Seguono le tavole dell'alfabeto dove il nostro frate con riga e compasso delinea la forma delle nuove lettere, neppure qui troviamo una costruzione geometrica che assomigli a quella della sezione aurea, l'alfabeto è bello anche senza essere aureo. Tutte le volte che cita la sezione aurea Pacioli segue

64 Pacioli (1509, 32v).

la denominazione euclidea: è la divisione di un segmento in media ed estrema ragione.

Il privilegio accordato a questi rapporti rispetto ad altri, ad esempio i citati rapporti pitagorici di 2/3 e di 3 / 4 reperibili in misura decisamente maggiore, è il risultato di circostanze storico-culturali e non deriva da particolari qualità estetiche. I rapporti 8/5 e 3/5 erano adottati nei casi opportuni, alla pari degli altri rapporti.

13. Nota conclusiva

La storia dei legami tra Raffaello e le matematiche si è mostrata più complessa di quanto previsto per diversi motivi. Un primo motivo è costituito dalle poliedriche facce della matematica del Rinascimento, perché negli anni tra Quattro e Cinquecento sotto questo titolo rientrava certamente la matematica come la intendiamo oggi, ma a pari livello si collocavano dottrine che giudichiamo più o meno esoteriche o persino legate alla magia, come le numerologie di origine pitagorica tramandate da Boezio, come la Cabala di Raimondo Lullo e soprattutto di Pico della Mirandola: un complicato intreccio di corrispondenze tra lettere, figure e numeri in grado di svelare i messaggi nascosti nelle parole e nelle frasi dei testi sacri. La presenza del Sigillo di Salomone insieme alle armonie numeriche e musicali sono un segnale inequivocabile, non meno evidente della presenza nell'affresco della *Scuola di Atene*, dell'astrologia, disciplina legata alla matematica per via dei difficili calcoli delle posizioni dei pianeti, e messa nelle mani di Zoroastro ritenuto l'autore degli *Oracoli Caldaici*.

Alla complessità della definizione del campo delle matematiche, si aggiunge la complessità che risiede nel tema stesso dell'affresco, nella sua resa figurativa. Ha giustamente rilevato Genn W. Most:

«Come può un artista rappresentare in modo pittorico un'attività intellettuale come la filosofia? Nella *Scuola di Atene* Raffaello sceglie di raffigurare una serie di attività basate sulla comunicazione e sulla razionalità (...). Le cinquantotto figure (...) sono tutte impegnate proprio in ciò che i filosofi tendono a fare: leggere, scrivere, tenere lezioni, discutere, dimostrare, fare domande, ascoltare, riflettere. Se questa ci appare una scelta ovvia, lo è semplicemente perché l'immagine dell'affresco di Raffaello si è profondamente impressa nel nostro immaginario visivo (...). È necessario uno sforzo di immaginazione storica per comprendere che quella di Raffaello non fu una scelta inevitabile, neanche probabile, per rappresentare la filosofia nel primo decennio del XVI secolo – ma che, al contrario, la *Scuola di Atene* si basa su una concezione di fondo senza precedenti nell'arte europea».[65]

A differenza della tradizione iconografica medioevale, Raffaello non rappresenta la filosofia in maniera allegorica come una figura femminile con in mano scettro e libri, ma invita lo spettatore ad assistere a qualcosa di completamente diverso: « la visione secolare della filosofia costituita essenzialmente dalla pratica di vita concreta dei filosofi».[66]

Raffaello era un pittore, la esecuzione della *Scuola di Atene* era un qualcosa di nuovo nella tradizione artistica sia dal punto di vista figurativo, sia da quello conoscitivo della vicenda che si andava ad affrescare. In questo itinerario conoscitivo venne inevitabilmente coinvolta la matematica e Raffaello si trovò a inventare un'iconografia del discorso matematico ben diverso da quello abachistico tipico dei tecnici. Le discipline matematiche nella *Scuola di Atene* sono parte del dibattito filosofico, sono discipline vive, degne di essere insegnate e discusse, così come fanno i personaggi di Raffaello intorno alle due lavagnette. Nell'affresco della Stanza della *Segnatura* la matematica viene dipinta con i tratti della nuova identità culturale che il Rinascimento le aveva conferito.

In qualità di topografo e architetto Raffaello ebbe modo di cimentarsi con le matematiche applicate ma la sua rappresentazione delle matematiche non è tanto figlia della sua formazione quanto specchio della nuova immagine di queste scienze che emergeva dalle discussioni dei filosofi e dei matematici fra XV e XVI secolo. Il genio artistico di Raffaello consiste nell'aver dato a quella immagine culturale una forma visibile destinata a diventare un'icona del Rinascimento.

65 Most (2001, 21).

66 Ivi, p. 43.

Bibliografia

AA.VV., 1984, *Raffaello e la sezione aurea: Palazzo Barberini,* Atti del convegno Roma, marzo-aprile, Roma-Bologna, Edizioni Bora.

Alberti, L. B., 1565, *L'architettura di Leon Battista Alberti. Tradotta in lingua fiorentina da Cosimo Bartoli*, Monte Regale.

Anonimo fiorentino, 1993, *Trattato di geometria pratica. Dal codice L.IV.18 (sec. XV) della Biblioteca comunale di Siena*, a cura di A. Simi, Siena, Università degli Studi di Siena.

Arrighi, G. (a cura di), 1973, Scuola lucchese, *Libro d'abaco. Dal codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca statale di Lucca*, Lucca, Cassa di risparmio di Lucca.

Baldasso, R., 2010, «The Portrait of Luca Pacioli and Disciple: A New Mathematical Look», in *Art Bulletin*, March-June 2010, Vol. XCII, n°. 1-2.

Baldasso, R. e Logan, J., 2017, «Between Golden Ratio and a Semiperfect Solid: Fra Luca Pacioli and the Portrayal of Mathematical Humanism», in Ingrid Alexander-Skipnes (a cura di), *Visual Culture and Mathematics in the Early Modern Period,* New York and London, Routledge.

Boezio, S., 1491, *Arithmetica, Geometria et Musica Boetii*, in Severino Boezio, *Opera*, Venezia.

Bradwardine, T., 1495, *Breve compendium artis Geometrie a Thoma Bravardine ex libris Euclidis, Boeti et Campani peroptime compilatus*, Parigi. Ristampato in, *Geometria speculativa Thome Bravardini recoligens omnes conclusiones geometricas (...) Cum quodam tractatu de quadratura circuli*, Parigi, 1511.

Cardano, G., 1539, *Hieronimi C. Cardani medici mediolanensis practica arithmetice et mensurandi singularis*, Milano.

Ciocci, A., 2009, *Luca Pacioli tra Piero della Francesca e Leonardo*, Sansepolcro, Aboca Museum Edizioni.

Ciocci, A., 2016, «Luca Pacioli e l'uomo vitruviano nel Rinascimento», in M. Martelli (a cura di), *Luca Pacioli e i grandi artisti del Rinascimento italiano,* Umbertide, UB.

Clagett, M., 1964, *Archimedes in the Middle Ages*, I. *The Arabo-Latin Tradition*, Madison, The Univ. of Wisconsin Press.

Clagett, M., 1976, *Archimedes in the Middle Ages*, II. *The Translations from the Greek by William of Moerbeke*, Philadelphia, The American Philosophical Society.

Clagett, M., 1978, *Archimedes in the Middle Ages*, III. *The Fate of the Medieval Archimedes, 1300 to 1565*, Philadelphia, The American Philosophical Society.

D'Alessandro, P. e Napolitani, P. D., 2012, *Archimede Latino / Archimedes Latinus Iacopo da San Cassiano e il corpus archimedeo alla metà del quattrocento con edizione della Circuli dimensio e della Quadratura parabolae,* Paris, Les Belles Lettres.

d'Etaples, J. L., 1503, *Iacobi Fabri Stapulensis epitome compendiosaque introductio in duo libros Arithmeticos divi Severini Boethi. (...) Caroli Bovili Samarobrini* (Charles de Bouelles) *Geometrici introductori liber,* Parigi.

De Angelis d'Ossat, G., 1984, «Le scelte proporzionali di Raffaello», in *Raffaello e la sezione aurea*, catalogo della mostra, Bologna, Edizioni Bora.

De Lubac, H., 1977, *L'alba incompiuta del Rinascimento. Pico della Mirandola*, Milano, Jaca Book.

Del Bufalo, D., 2010, *Marmorari magistri romani*, Roma, L'Erma di Bretschneider.

Euclide, 1482, *Elementi*, Venezia, Erhard Ratdolt.

Euclide, 1509, *Euclidis Megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo traslata (...) Luca Paciolus theologus insignis, altissima mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus, iudicio castigatissimo detersit emendavit*, Venezia.

Euclide, 1543, *Euclide Megarense phiposopho solo introduttore delle Scientie mathematice, diligentemente reassettato et alla integrità ridotto per il degno professore di tal Scientie Nicolò Tartarea Brisciano*, Venezia.

Folkerts, M., 2005, «Euclid in Medieval Europe», in Folkerts, *The development of mathematics in medieval Europe: the Arabs, Euclid, Regiomontanus,* Aldershot, Ashgate.

Gamba, E., 2010, «Proviamo a rileggere il "Doppio ritratto" di Luca Pacioli», in F.M. Cesaroni, M. Ciambotti, E. Gamba, V. Montebelli, *Le tre facce del poliedrico Luca Pacioli,* Urbino, Quaderni del Centro Internazionale di Studi Urbino e la Prospettiva.

Gaffurio, F., 1492, *Theorica musicae*, Philippus de Mantegatiis, Cassanus, voor Johannes Petrus de Lomatio.

Gaffurio F., 1496, *Practica musicae,* Milano.

Joost-Gaugier, C.L., 2002, *Raphael's Stanza della Segnatura. Meaning and Invention*, Cambridge, Cambridge University Press.

Joost-Gaugier, C.L., 2008, *Pitagora e il suo influsso sul pensiero e sull'arte*, Roma, Edizioni Arkeios.

Kristeller, P.O., 1978, *Concetti rinascimentali dell'uomo e altri saggi*, Firenze, La Nuova Italia.

Marias, F. e Pereda, F., 2004, «Petrus Hispanus pittore in Urbino», in Fiore, F.P. (a cura di), *Francesco di Giorgio alla corte di Federico da Montefeltro,* Atti del Convegno Internazionale di studi (Urbino 11-13 ottobre 2001), Firenze, Olschki.

Montevecchi, B., 1992, «Giusto, Berruguete e I Fiamminghi a Palazzo», in Dal Poggetto, P. (a cura di), *Piero e Urbino, Piero e le corti rinascimentali,* Venezia, Marsilio editori.

Most, G. W., 2001, *Leggere Raffaello. La Scuola di Atene e il suo pre-testo*, Torino, Einaudi.

Murdoch, J.E., 1971, «Euclid: Trasmission of the Elements», in *Dictionary of Scientific Biography,* vol. 4, New York.

Napolitani, P. D. e D'Alessandro, P., 2012, *Archimede tra gli artisti del Quattrocento, in Archimede. Il primo genio Universale,* Collana Capire la scienza, 2, Roma, Gruppo Editoriale L'Espresso, Biblioteca di Repubblica.

Oberhubert, K., 1974, *Raffaello. Il cartone per la Scuola di Atene*, Milano, Silvana Editoriale d'Arte.

Pacioli, L., 1494, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, Venezia.

Pacioli, L., 1509, *Divina proportione*, Venezia.

Pagli, P., 2000, «Le volgarizzazioni degli "Elementi" di Euclide anteriori all'edizione a stampa», in P. Freguglia, L. Pellegrini e R. Paciocco (a cura di), *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medievale. Atti del Convegno internazionale di studio, Chieti 2-4 maggio 1996,* Napoli, ESI.

Paolo da Middelburg, 1513, *Paulina. De recta Paschae celebratione et de die passionis Domini nostri Iesu Christi*, Fossombrone.

Piero della Francesca, 2012, *Trattato d'abaco*, ediz. naz., Roma, Poligrafico dello Stato.

Platone, 2022, *Timeo*, a cura di F. M. Petrucci, Fondazione Lorenzo Valla, Mondadori, Milano.

Reale, G., 2005, *La Scuola di Atene di Raffaello*, Milano, Bompiani.

Reale, G. e Sgarbi, E., 2010, *Raffaello. La Stanza della Segnatura,* Milano, Bompiani.

Roccasecca, P., 2001, «La finestra albertiana», in F. Camerota (a cura di), *Nel segno di Masaccio. L'invenzione della prospettiva*, catalogo della mostra, Firenze, Giunti.

Sangiorgi, F. (a cura di), 1976, *Documenti urbinati. Inventari del Palazzo ducale (1582-1631)*, Urbino, Accademia Raffaello.

Scholem, G., 2008, *La stella di David. Storia di un simbolo*, Firenze, Giuntina.

Secret, F., 1958, «Le symbolisme de la kabbale chrétienne dans la "Shechina" de Egidio da Viterbo», in AA.VV., *Umanesimo e simbolismo*, a cura di E. Castelli, Collana dell'Archivio di Filosofia, Padova, CEDAM.

Secret, F., 2001, *I cabalisti cristiani del Rinascimento*, Roma, Edizioni Arkeios.

Tartaglia, N., 1537, *Nova scientia*, Venezia.

Tartaglia, N., 1556, *La seconda parte del General trattato di numeri et misure*, Venezia.

Ulivi, E., 2009, «Documenti inediti su Luca Pacioli, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, con alcuni autografi», in *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, vol. XXIX.

Valla, G., 1501, *Georgii Vallae placentini viri clarissimi de expetendis et fugiendis rebus opus*, Venezia.

Vitruvio, 1511*, M. Vitruuius per Iocundum solito castigatior factus cum figuris et tabula vt iam legi et intelligi possit [De Architectura]*, Fra Giocondo (a cura di), Impressum Venetiis, sumptu miraque diligentia Ioannis de Tridino alias Tacuino.

Vitruvio, 1524, *De architectura traducto di latino in vulgare dal vero exemplare con le figure a li soi loci con mirando ordine insignito,* Francesco Lutio Durantino (a cura di), Venezia, Editore: Ioane Antonio & Piero Fratelli da Sabio.

Zamberti, 1505, *Euclidis megarensis philosophi platonici* [*mathematicarum disciplinarum ianitoris, (...) Elementorum libros XIII (...) Bartolomeo Zamberto Veneto interprete*].

Zarlino, G., 1573, *Istitutioni harmoniche*, Venezia.

Sitografia

Raffaello Sanzio, *Scuola di Atene* (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%22The_School_of_Athens%22_by_Raffaello_Sanzio_da_Urbino.jpg [consultato il 14/01/2025].

Giusto di Gand, *Euclide*, Studiolo di Federico da Montefeltro (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclidi_Megaren_%28Euclide%29_-_Studiolo_di_Federico_da_Montefeltro.jpg [consultato il 14/01/2025].

Iacopo de Barbari, *Doppio ritratto*, Museo di Capodimonte, Napoli (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pacioli.jpg [consultato il 14/01/2025].

Sacello del Santo Sepolcro (1467), Firenze, Formella [I. Sailko, CC BY-SA 3.0]: https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Tempietto,_formelle_30.JPG [consultato il 14/01/2025].

Museo dell'Opera del Duomo, Firenze, Formella [I. Sailko, CC BY-SA 3.0]: https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Tempietto,_formelle_16.JPG [consultato il 14/01/2025].

Badia Fiesolana, Riquadro a tarsie marmoree della facciata, sec. XII, in La Biblioteca della Toscana "Pietro Leopoldo", a cura di Consiglio regionale della Toscana: https://www.consiglio.regione.toscana.it/upload/BIBLIOTECA/documenti/DOCUMENTI_BIBLIOTECA/libretto_biblio_maggio23_web_cpl.pdf [consultato il 21/12/2024].

Santa Maria in Trastevere Roma, tratta da «Kabbala e geometria: il cerchio con il punto», 28 febbraio 2015 da Elisabetta Meacci, in *Archeosofia a Pistoia*: https://archeosofiapistoia.wordpress.com/2015/02/28/kabbala-e-geometria-il-cerchio-con-il-punto/ [consultato il 14/01/2025].

Chiostro Basilica san Giovanni in Laterano, Roma (Miguel Hermoso Cuesta, via Wikimedia Commons, CC BY-SA 4.0): https://commons.wikimedia.org/wiki/

File:Catedra_cosmatesca_Laterano_03.JPG [consultato il 14/01/2025].

Cattedra episcopale. Duomo di Anagni. Sec. XIV, ph. Graframan.com: https://www.cattedraledianagni.it/cattedrale [consultato il 14/01/2025].

Domus Ostaglia, Brescia, ph. Stefano Bolognini: https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Domus_Ortaglia_brescia_by_Stefano_Bolognini25.JPG [consultato il 14/01/2025].

Ritratto di Tolomeo, Studiolo di Federico da Montefeltro, Urbino (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Ptolemy_1476_with_armillary_sphere_model.jpg [consultato il 14/01/2025].

Giuliano d'Arrigo detto il Pesello, *Cielo stellato*, Cappella Pazzi, Santa Croce, Firenze, 1442 (I. Sailko, CC BY-SA 3.0): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:San_lorenzo,_sagrestia_vecchia,_cupoletta_del_pesello.JPG [consultato il 14/01/2025].

Tolomeo, *Cosmographia* (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PtolemyWorldMap.jpg [consultato il 14/01/2025].

Raffaello Sanzio, Stanza della Segnatura, allegoria del *Motore imobile* (Public Domain, via Wikimedia Commons). https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Volta_della_stanza_della_segnatura_06_primo_motore.jpg [consultato il 14/01/2025].

Raffaello Sanzio, cartone preparatorio della *Scuola di Atene*. Pinacoteca Ambrosiana, Milano: https://ambrosiana.it/opere/scuola-di-atene/ [consultato il 14/01/2025].

Raffaello Sanzio, *Sposalizio della Vergine*, Brera, Milano (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Raffaello_-_Spozalizio_-_Web_Gallery_of_Art.jpg [consultato il 14/01/2025].

Raffaello Sanzio, *Sacra Famiglia Carnigiani*, (1507) Alte Pinakothek, Monaco (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rafael_-_Sagrada_Fam%C3%ADlia_Canigiani.jpg [consultato il 14/01/2025].

Raffaello Sanzio, *Trasfigurazione*, Musei Vaticani, Città del Vaticano (Public Domain, via Wikimedia Commons): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transfiguration_Raphael.jpg [consultato il 14/01/2025].

La Scuola di Atene è uno dei quattro affreschi dipinti da Raffaello nella Stanza della Segnatura in Vaticano. E' una tra le opere che ancora non smette di destare interrogativi e curiosità. Il libro esamina i personaggi e gli oggetti della Scuola di Atene legati alla matematica con l'obiettivo di comprendere i punti di vista di Raffaello, le scelte che poteva fare e i motivi delle scelte consapevolmente fatte. Quali conoscenze matematiche e dottrine matematico-filosofiche circolavano negli ambienti frequentati da Raffaello? Quali fonti d'informazione in materia Raffaello aveva a disposizione? Quali informazioni poteva ottenere dalle persone che frequentava o con cui aveva avuto incontri significativi? Il libro cerca di indagare tali questioni, proponendo anche nuovi filoni di ricerca.

Enrico Gamba ha insegnato storia della Matematica all' Università di Brescia ed è stato membro della commissione per l'edizione nazionale delle opere di Piero della Francesca. Ha all'attivo oltre 100 pubblicazioni ed articoli su argomenti di storia della scienza e della tecnica dal Medioevo all'Epoca contemporanea.

CENTRO DI STUDI
URBINO
E LA PROSPETTIVA

PRINT ISBN 9788831205818
PDF ISBN 9788831205795
EPUB ISBN 9788831205801

ISBN: 978-8-83120-581-8

1506
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI URBINO
CARLO BO

UUP
URBINO
UNIVERSITY
PRESS